

**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY**

**CAMPUS CIUDAD DE MEXICO**

---

---



**Cálculo del Valor en Riesgo con el modelo de  
Cadenas de Markov con Simulación Monte  
Carlo**

**DOCTORADO EN CIENCIAS FINANCIERAS**

**TESIS PRESENTADA POR**

**PEDRO ALEJANDRO RAMÍREZ RAMÍREZ**

**FEBRERO 2008**



**TECNOLÓGICO  
DE MONTERREY**

Hacemos constar que en la Ciudad de México, el día 25 de febrero de 2008, el alumno:

**PEDRO ALEJANDRO RAMÍREZ RAMÍREZ**

sustentó el Examen de Grado en defensa de la Tesis titulada:

**Cálculo del valor en riesgo con el modelo de cadenas de Markov con simulación monte carlo**

Presentada como requisito final para la obtención del Grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS FINANCIERAS**

Ante la evidencia presentada en el trabajo de tesis y en este examen, el *Comité Examinador*, presidido por el **DR. IGOR PATRICIO RIVERA GONZÁLEZ**, ha tomado la siguiente resolución:

— APROBADO —

**Dr. Arturo Lorenzo Valdés**  
*Director de Tesis*

**Dr. José Antonio Núñez Mora**  
*Lector*

**Dr. Igor Patricio Rivera González**  
*Lector*

**Dr. José Antonio Núñez Mora**  
*Director del Programa Doctoral*

## **AGRADECIMIENTOS**

*A MI PADRE† Y MADRE*

Por haberme apoyado en todas las decisiones que he tomado, e inculcarme valores que me servirán toda la vida.

*A ELIAS Y ELISA*

Por su ejemplo y apoyo incondicional en todos los sentidos.

*A MIGUEL Y GABY*

Por su ejemplo y sabios consejos que me han dado.

*A YAHEL*

Por aparecer en mi vida y darme esa motivación y apoyo para ser cada día mejor.

## **RESUMEN**

Una de las aplicaciones más importantes dentro de la medición y control de riesgos financieros se refiere al cálculo del Valor en Riesgo y su resultado va a depender de la volatilidad, puesto que a través de ella se pueden medir los cambios en los rendimientos de un portafolio de inversión, por eso es que día a día se tratan de encontrar nuevos modelos que pronostiquen esta volatilidad, tratando de lograr una estimación más precisa; sin embargo estos modelos son cada vez más complejos y muchos de ellos no van a tener solución analítica, debido a esto es que es importante implementar nuevas metodologías que sirvan para aproximarlos, en donde se ocupe menor tiempo computacional y se pueda tener igual o mayor exactitud que con las metodologías usadas actualmente.

En este trabajo se incorporó la metodología de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo para la estimación de la volatilidad a partir del modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo de Hull y White; con la estimación de volatilidad realizada, se calculó el VaR para un portafolio compuesto por acciones que forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones del mercado accionario mexicano y se compararon los resultados con los modelos clásicos en finanzas y con los calculados a partir de modelos econométricos discretos. De acuerdo a los resultados, el modelo Hull y White usando MCMC y de acuerdo a los criterios de Kupiec y del Banco Internacional de Pagos, los modelos no son rechazados al 99% de confianza y se encuentran en la “zona verde” de la clasificación de Basilea, lo que significa que es un modelo preciso y no necesita calibración alguna, por lo cual para el periodo de tiempo estudiado puede usarse de forma indistinta a los modelos clásicos en finanzas.

# INDICE

<b>INDICE DE TABLAS .....</b>	<b>8</b>
<b>INDICE DE GRÁFICAS .....</b>	<b>9</b>
<b>RESUMEN .....</b>	<b>10</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 1 VALOR EN RIESGO .....</b>	<b>12</b>
1.1 Definición de Valor en Riesgo .....	12
1.2 Variables del VaR.....	13
1.2.1 Horizonte de tiempo. ....	13
1.2.2 Nivel de Confianza .....	14
1.2.3 Cantidad de Observaciones Utilizadas para el Cálculo.....	14
1.3 Metodologías Para el Cálculo del VaR .....	14
1.3.1 Simulación Histórica .....	15
1.3.2 Simulación Monte Carlo.....	16
1.3.3 Modelos Paramétricos .....	17
1.3.4 Modelos Econométricos Discretos .....	20
1.3.4.1 GARCH (1,1) .....	21
1.3.4.2 M-GARCH .....	22
1.3.4.3 TARCH.....	22
1.3.4.4 EGARCH.....	23
1.3.4.5 PARCH.....	24
1.3.4.6 EWMA .....	24
1.3.5 Modelos Continuos de Volatilidad Estocástica.....	25
<b>CAPÍTULO 2 PORTAFOLIO EFICIENTE .....</b>	<b>31</b>

<b>CAPÍTULO 3 FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA BAYESIANA Y MODELOS</b>	
<b>MCMC.....</b>	<b>42</b>
3.1 Estadística Bayesiana .....	42
3.2 Cadena de Markov.....	44
3.3 Simulación Monte Carlo.....	47
3.4 Simulación Monte Carlo vía Cadenas de Markov.....	51
3.4.1 Generación de los Parámetros .....	51
3.4.1.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings.....	52
3.4.1.2 Algoritmo de Gibbs .....	53
3.4.2 Valores Iniciales .....	54
3.4.3 Número de Iteraciones.....	55
3.4.4 Número de Cadenas.....	55
3.4.5 Burn-In .....	55
3.4.6 Convergencia.....	56
3.4.7 Análisis de los Resultados .....	56
<b>CAPÍTULO 4 MARCO METODOLÓGICO.....</b>	<b>58</b>
4.1 Justificación .....	58
4.2 Objetivo General .....	58
4.3 Objetivos Específicos .....	59
4.4 Hipótesis .....	59
4.5 Metodología del Trabajo .....	59
4.5.1 Elección de los Portafolios .....	60
4.5.2 Modelos Empleados .....	61
<b>CAPÍTULO 5 RESULTADOS .....</b>	<b>67</b>
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES .....</b>	<b>74</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>77</b>

<b>ANEXOS .....</b>	<b>81</b>
ANEXO A. Portafolio Óptimo .....	81
ANEXO B. Gráficas del IPC en los periodos de estudio .....	82
ANEXO C. Histogramas de Resultados .....	83
ANEXO D. Tablas para Backtesting.....	85
D1. Criterio de Kupiec.....	85
D2. Criterio del Banco Internacional de Pagos .....	86

## INDICE DE TABLAS

Tabla 4.1	Composición accionaria del portafolio de mínima varianza. ....	59
Tabla 5.1	Parámetros de los modelos econométricos discretos.....	67
Tabla 5.2	Resultados del Valor en Riesgo para los modelos econométricos discretos de un portafolio de \$1000,000 a un día a un 99% de confianza.....	68
Tabla 5.3	Resultados del Valor en Riesgo para los modelos clásicos en finanzas de un portafolio de \$1000,000 a un día a un 95% de confianza.....	68
Tabla 5.4	Media y Desviación estándar de los parámetros del modelo de Hull and White, a partir del modelo MCMC.....	70
Tabla 5.5	Media de los Rendimientos y Volatilidad de los rendimientos del portafolio, simulados por MCMC y reales. ....	71
Tabla 5.6	Resultados del Valor en Riesgo para el modelo MCMC de un portafolio de \$1,000,000 a un día a un 99% de confianza.....	71
Tabla 5.7	Conteo de las pérdidas que exceden cada uno de los Valores en Riesgo.....	72
Tabla B1	Histograma y estadísticos del IPC para 510 datos del periodo del 3 de enero de 1995 al 31 de diciembre de 1996. ....	81
Tabla B2	Histograma y estadísticos de los rendimientos del IPC para 510 datos del periodo del 3 de enero de 1995 al 31 de diciembre de 1996. ....	81
Tabla D1	Regiones de no rechazo de Kupiec. ....	85
Tabla D2	Clasificación del modelo de acuerdo al número de excepciones para 510 observaciones, del Banco Internacional de Pagos. ....	86



## INDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1.1	Histograma de frecuencias de los rendimientos de un portafolio.....	14
Gráfica1.2	Simulación de 3 posibles escenarios, a partir del precio de una acción de 100 pesos. ....	16
Gráfica 2.1	Curva de la frontera eficiente.....	36
Gráfica 4.1	Rendimientos del Portafolio en el periodo de 1995-1996. ....	60
Gráfica 5.1	Simulaciones del modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo mediante MCMC. ....	70
Gráfica A1	Frontera eficiente para el periodo 1995-1996.....	80
Gráfica C1	Convergencia del parámetro $\mu_y$ , de la ecuación $dy = \mu_y dt + \sqrt{v}dw_t^y$ .....	82
Gráfica C2	Convergencia del parámetro $\mu_v$ de la ecuación $dv = v\mu_v dt + v\sigma_v dw_t^v$ .....	82
Gráfica C3	Convergencia del parámetro $\sigma_v$ de la ecuación $dv = v\mu_v dt + v\sigma_v dw_t^v$ .....	83
Gráfica C4	Rendimientos obtenidos en la iteración 510, para el modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo con MCMC. ....	83

## **INTRODUCCIÓN**

En últimos años ha habido un creciente trabajo de investigación en las ciencias financieras, tratando de encontrar modelos que puedan pronosticar las tendencias en el mercado, sin embargo estos modelos cada vez son más complejos y difícilmente tienen solución analítica, por lo que tienen que resolverse mediante simulaciones. Por ello se pretende incorporar un modelo alternativo que pueda tener la misma precisión que otras metodologías y logre reducir el tiempo computacional, además que pueda ser versátil para sufrir modificaciones y actualizaciones en el futuro, este modelo es el de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo, en donde suponiendo distribuciones a priori para cada uno de los parámetros y conociendo la distribución de los resultados, se puede estimar la distribución que mejor converja de los parámetros y con ello pronosticar nuevos resultados en el futuro.

La metodología de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo (MCMC) es usada en diversas disciplinas, como son la ingeniería y la medicina, para simular procesos biológicos y fermentaciones, sin embargo es una metodología con mucho potencial y de la cual particularmente en México no existen publicaciones en donde se apliquen los modelos MCMC junto con modelos de volatilidad estocástica, y a nivel internacional son pocos los artículos que los incorporan.

El objetivo de este trabajo es incorporar el modelo de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo en la estimación de la volatilidad a partir de un modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo, para un portafolio compuesto por acciones que forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones del mercado accionario mexicano, y a partir de este modelo de volatilidad, estimar el Valor en Riesgo (VaR). El resultado de VaR obtenido se comparará con los que arrojan los modelos clásicos en finanzas y con los calculados a partir de modelos econométricos discretos.

Esta tesis se estructura de la siguiente forma, en el capítulo uno se hará una revisión de los conceptos de Valor en Riesgo y los diferentes modelos para calcularlo; en el capítulo dos se explica la metodología para seleccionar un portafolio de mínima varianza con base en los conceptos de Markowitz; en el capítulo tres se hará una revisión de estadística bayesiana, simulación Monte Carlo y el modelo MCMC que se propone utilizar para simular las ecuaciones diferenciales estocásticas; la metodología usada y la descripción del problema se desarrollarán en el capítulo cuatro; los resultados se presentarán en el capítulo cinco y en el capítulo seis se mostrarán las conclusiones y recomendaciones.

# CAPÍTULO 1 VALOR EN RIESGO

## 1.1 Definición de Valor en Riesgo

En este capítulo se revisará el concepto de Valor en Riesgo (también conocido como VaR, por sus siglas en inglés Value at Risk), sus variables y los diferentes modelos mediante los cuales se calcula, además se diferenciarán los modelos econométricos en tiempo discretos: GARCH (1,1), M-GARCH, TARARCH, EGARCH, PARARCH, del modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo Hull y White; para simular éste último se propone usar el modelo de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo, mismo que se explicará en el capítulo 3.

En las últimas décadas se han desarrollado nuevas metodologías para la modelación de riesgos financieros con el fin de poder estimar el riesgo de mercado. El Valor en Riesgo es una de las metodologías más importantes usada entre las instituciones financieras, debido a su sencillez y versatilidad para una amplia gama de posiciones de riesgo o carteras de inversión, en todos los niveles de una institución financiera.

En 1994 en el documento técnico de J.P. Morgan se dio a conocer el término de Valor en Riesgo como un método para cuantificar el riesgo de mercado asociado a instrumentos financieros o portafolios con varios tipos de instrumentos a través del cálculo de un solo número. Jorion (1997), Crouhy, Galai y Mark (2001), definen al Valor en Riesgo como la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo en un intervalo de confianza dado.

El valor en Riesgo es entonces la máxima pérdida esperada dado un nivel de confianza  $c$  y un horizonte de tiempo  $N$ . De esta forma el VaR es la distancia que se tiene del percentil  $(1-c)\%$  a la media de la distribución del cambio en el valor del portafolio  $\Delta p$ . En su forma más general, el VaR puede derivarse de la

distribución de probabilidad del valor futuro del portafolio  $f(w)$ . Dado un nivel de confianza  $c$ , se encuentra la peor realización posible de  $w$  tal que la probabilidad de exceder dicho valor sea  $c$ :

$$c = \int_w^{\infty} f(w)dw \quad (1)$$

Visto de otra forma, se busca que la probabilidad de un valor inferior al cuantil  $W$ ,  $p = P(w \leq W)$  sea  $1 - c$ :

$$1 - c = \int_{-\infty}^W f(w)dw = P(w \leq W) = p. \quad (2)$$

En la práctica, las entidades financieras calculan diariamente el VaR y lo remiten a los organismos supervisores periódicamente. Gracias a este resultado numérico, estos organismos pueden tomar decisiones para fijar el nivel de riesgo dentro de la entidad.

## **1.2 Variables del VaR**

Para determinar el VaR es necesario establecer ciertos parámetros, estos son el horizonte temporal, el intervalo de confianza y la cantidad de observaciones utilizadas para el cálculo.

### **1.2.1 Horizonte de tiempo.**

Es el periodo de tiempo a partir de hoy hacia el futuro donde se va a determinar la máxima pérdida esperada. Y va a depender de la liquidez de los activos que compongan el portafolio.

Para operaciones de mercado de dinero suele utilizarse un día, una semana o dos.

### **1.2.2 Nivel de Confianza**

El nivel de confianza define el tiempo en forma de porcentaje en el cual no van a existir pérdidas mayores a las calculadas con el VaR, es decir si tengo un nivel de confianza del 99% quiere decir que en 99 de cada 100 días no existirá una pérdida mayor a la obtenida en el VaR o de otra forma que solamente en 1 de cada 100 días existirá una pérdida mayor a la obtenida en el VaR.

Generalmente los intervalos para el cálculo del Valor en Riesgo van del 90% al 99%.<sup>1</sup>

### **1.2.3 Cantidad de Observaciones Utilizadas para el Cálculo**

La sensibilidad del VaR va a depender del número de datos, si las observaciones son muy pocas permite que el VaR reaccione rápidamente a los cambios del mercado, sin embargo los datos no se aproximarán a la mejor distribución de los rendimientos; mientras que si el número de observaciones es muy grande, el VaR va a tardar más en reaccionar ante los movimientos de los precios, además que se tendrá una mejor distribución de los rendimientos.

## ***1.3 Metodologías Para el Cálculo del VaR***

Debido a que el VaR sirve para tomar decisiones con respecto al riesgo afrontado dentro de las instituciones financieras, es de suma importancia su exactitud, por lo que existen diferentes metodologías para su cálculo, entre las que se pueden destacar:

- Simulación Histórica
- Simulación Monte Carlo
- Modelos Paramétricos

---

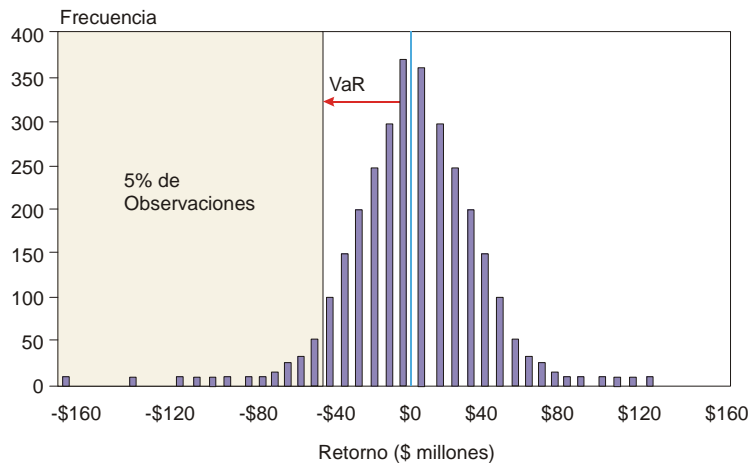
<sup>1</sup> De Lara, A (2001)

### 1.3.1 Simulación Histórica

Consiste en generar escenarios de los posibles valores de una cartera de activos financieros y sus correspondientes pérdidas y ganancias con respecto a su valor actual. Con las pérdidas y ganancias asociadas a cada escenario, se define una distribución de probabilidad de pérdidas y ganancias del valor del portafolio, de la cual se va a obtener el VaR.

Se basa en el supuesto de que cualquier escenario pasado podría repetirse en el futuro, ya que el comportamiento pasado podría ser similar a los eventos futuros.

Para aplicar esta metodología se deben identificar primero los componentes de los activos de los portafolios y reunir los datos de los precios diarios históricos considerando un periodo de uno a dos años de observaciones diarias (entre 250 y 510 datos). Posteriormente se grafica el histograma de frecuencias de los rendimientos simulados y se calcula el cuantil de dicho histograma a un determinado nivel de confianza.



Gráfica 1.1 Histograma de frecuencias de los rendimientos de un portafolio.

En la Gráfica 1.1 se muestra el cálculo del VaR al 95%, en donde a partir del histograma de frecuencias se va a calcular el percentil del 5% de los rendimientos históricos.

Para esta aproximación no se emplea ningún supuesto sobre la distribución de los rendimientos, ni se supone ningún tipo de comportamiento de los parámetros. Para calcular el VaR se busca el percentil empírico de los rendimientos históricos, o cambios porcentuales. Por el hecho de que no supone ninguna distribución en específico, este método tiene en cuenta posibles distribuciones no-normales y colas pesadas. Dado que no se basa en modelos de valuación, no está propenso al riesgo del modelo.

Por otro lado, al utilizar el supuesto de que el pasado representa acertadamente el futuro inmediato, no toma en cuenta la predecible variación en el tiempo omitiendo situaciones con volatilidad temporalmente elevada.

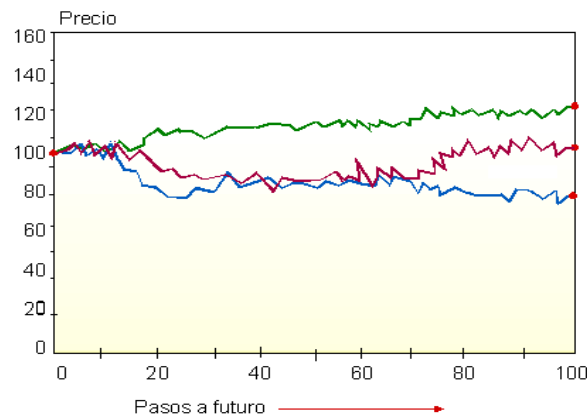
### **1.3.2 Simulación Monte Carlo**

La simulación Monte Carlo<sup>2</sup> consiste en obtener de manera repetida los valores de los precios o rendimientos de un activo o portafolio de activos a partir de la distribución de probabilidad conocida que gobierna el comportamiento de un activo subyacente. Cada valor generado aleatoriamente, conocido como intento, paso o escenario, nos da un valor posible para nuestro activo o portafolio de activos en el horizonte de tiempo establecido. El propósito es generar una cantidad “suficientemente” grande de escenarios, de manera tal que la distribución simulada de los valores del activo o portafolio converja hacia su distribución de probabilidad real. Una vez inferida la distribución del activo o portafolio, el paso siguiente es calcular el Valor en Riesgo; en la Gráfica 1.2 se muestran 3 simulaciones del precio de una acción en donde se está pronosticando su comportamiento durante 100 días.

---

<sup>2</sup> Usada por Boyle, P.(1977) por primera vez para valuar opciones.





Gráfica 1.2 Simulación de 3 posibles escenarios, a partir del precio de una acción de 100 pesos.

La simulación Monte Carlo tiene la ventaja de que se puede utilizar cualquier distribución de probabilidad para los factores de riesgo, incluyendo sus dependencias entre ellos, pudiéndose modelar cualquier portafolio compuesto por instrumentos no lineales. Sin embargo su desventaja principal radica en el uso intensivo de los recursos de cómputo para realizarla.

### 1.3.3 Modelos Paramétricos

A este tipo de modelos también se les conoce como de varianza y covarianza y estos modelos tienen el supuesto de que los rendimientos de los activos están distribuidos normalmente, por consiguiente el rendimiento del portafolio también sigue esta distribución, ya que es una combinación lineal de sus componentes ponderados por su importancia dentro de la cartera.

Para hacer la estimación se van a usar ecuaciones que especifiquen parámetros como la volatilidad y la correlación del portafolio y se aplicarán conceptos de álgebra lineal para multiplicación de matrices.

La matriz de varianza covarianza, se va a calcular a partir de la multiplicación de la matriz diagonal de desviaciones estándar de los cambios porcentuales de los factores de riesgo, por la matriz de correlaciones de los factores multiplicándola nuevamente por la matriz diagonal de las desviaciones estándar, a partir de la ecuación

$$[\Sigma] = [\sigma][C][\sigma], \quad (3)$$

en donde:

$[\Sigma]$ : Matriz de Varianza- Covarianza que incluye las correlaciones entre los factores que afectan el valor del portafolio ( $n \times n$ ).

$[\sigma]$ : Matriz diagonal de desviaciones estándar de los cambios porcentuales de los factores de riesgo

$[C]$ : Matriz de correlaciones

Visto de forma matricial tenemos

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \dots & \rho_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

La matriz de Varianza Covarianza resultante de la operación efectuada mediante la ecuación (4) va a ser:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \dots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & \dots & \sigma_{mn}^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$m = n.$$

Una vez calculando la matriz de varianza - covarianza, se calculará la desviación estándar del cambio porcentual del portafolio, multiplicando la matriz transpuesta de los pesos de las posiciones del portafolio por la matriz de varianza- covarianza y por la matriz de los pesos de las posiciones del portafolio, de la siguiente forma:

$$\sigma_p = \sqrt{[X]^T [\Sigma][X]}. \quad (6)$$

Visto de forma matricial como:

$$\sigma_p = \sqrt{(X_1 \quad X_2 \cdots X_m) \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & \cdots & \sigma_{mn}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}} \quad (7)$$

$m = n,$

en donde se tiene:

$\sigma_p$  =Volatilidad del cambio porcentual del valor del portafolio (1 x 1).

$[X]^T$  =Vector transpuesto de los pesos de las posiciones del portafolio (1 x n)

$[X]$  =Vector de los pesos de las posiciones del portafolio (n x 1)

Una vez conocida la desviación estándar del cambio porcentual del valor del portafolio, el Valor en Riesgo es simplemente una constante que depende del nivel de confianza  $c$ , multiplicada por la desviación estándar del portafolio,  $\sigma_p$ , multiplicados por el Valor del Portafolio  $P$ .

$$VaR(c) = -z_{1-c} \sigma_p P, \quad (8)$$

donde  $z_{1-c}$  corresponde al cuantil apropiado de la distribución normal estándar. A pesar de que el supuesto de normalidad simplifica los cálculos del VaR, esto implica un costo relativamente alto pues las rentabilidades diarias poseen colas pesadas.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Alonso y Arcos (2005)

De esta manera al analizar precios y rendimientos a través del tiempo para la estimación del VaR, comúnmente se encuentra que existen colas anchas, asimetría en los rendimientos, formación de Clusters de volatilidad y correlación negativa entre el rendimiento y la volatilidad. No obstante que las series de tiempo financieras son heteroscedásticas a través del tiempo, bajo algunos supuestos puede pronosticarse la volatilidad de manera eficiente.

### 1.3.4 Modelos Econométricos Discretos

Mientras mejor sea la estimación de la varianza en estos modelos, mejor va a ser la estimación del VaR, por lo que se pueden hacer correcciones o actualizaciones de la matriz de varianza-covarianza del portafolio; esta actualización se puede hacer mediante algunos modelos econométricos como los modelos GARCH (Generalized Autorregresive Conditional Heteroscedasticity) y sus derivaciones debido a que las series financieras presentan periodos con una muy alta volatilidad o un alto grado de curtosis.

Una aproximación para modelar los cambios de rendimientos se basan en los modelos autorregresivos condicionales heteroscedásticos, los cuales siguen la ecuación (9)

$$y_{t+1} = m(y_t) + \sigma(y_t)\varepsilon_t, \quad (9)$$

donde  $m$  y  $\sigma$  son funciones escalares y  $\varepsilon_t$  es una secuencia de variables i.i.d.

La probabilidad de que el VaR exceda a las pérdidas del portafolio en el futuro, va a estar dada por el cuantil de la distribución normal estándar de los errores  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} P_t[y_{t+1} < VaR_t] &= c \\ P_t[my_t + \sigma y_t v_t < VaR_t] &= c \\ P_t\left[v_t < \frac{VaR_t - my_t}{\sigma y_t}\right] &= c. \end{aligned} \quad (10)$$

Si los errores  $\varepsilon_t$  son i.i.d., se puede estimar el  $c$ -cuantil de la distribución  $\varepsilon$ . Cuando la distribución de los errores es asumida gaussiana, el VaR es estimado por:

$$VaR = -\hat{m}_t + \hat{\sigma}_t Z_{(1-c)}, \quad (11)$$

y los rendimientos se estiman a partir de un modelo ARMA ( $p, q$ ):

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \alpha_3 y_{t-1} + \alpha_4 y_{t-2} + \varepsilon_t. \quad (12)$$

Los modelos tipo GARCH, que se describirán en las siguientes secciones, van a incorporar una ecuación para el comportamiento de la volatilidad, suponiendo que existe heteroscedasticidad condicional a través del tiempo, cada modelo econométrico en tiempo discreto servirá para pronosticar los rendimientos del portafolio a través de los parámetros  $\mu_t$  y  $a_t$ , en donde  $\mu_t$  se estimará a través de un modelo ARMA ( $p, q$ ) y el parámetro  $a_t$  incorporará el comportamiento de la volatilidad  $\sigma_t$ .

### 1.3.4.1 GARCH (1,1)

Un modelo GARCH<sup>4</sup> tiene como propósito estimar la varianza no condicional de los rendimientos de los activos financieros. Estos modelos son procesos autorregresivos generalizados con heteroscedasticidad condicional, es decir modelos que suponen que la varianza cambia a través del tiempo.

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + a_t \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (13)$$

con:  $\varepsilon_t \approx IID[0,1]$  y  $\beta_1 + \beta_2 < 1$

---

<sup>4</sup> Engle (1982) y Bollerslev (1986) desarrollaron este modelo de estimación.

la primera ecuación de (13) se usará para obtener el rendimiento del portafolio mediante la esperanza  $\mu_t$  (que será estimada a través de un modelo ARMA  $(p, q)$ ) y un parámetro de perturbación  $a_t$ .

La segunda ecuación muestra el comportamiento de las perturbaciones  $a_t$  y mediante la tercera ecuación se hará la modelación de la varianza  $\sigma_t^2$

La varianza se explica únicamente por un valor rezagado de la misma varianza y un valor rezagado de los residuales. La distribución de los rendimientos es normal y el pronóstico de largo plazo incluye al valor de la varianza no condicional.

### 1.3.4.2 M-GARCH<sup>5</sup>

Es similar a los procesos GARCH al estimar la varianza de los datos, sin embargo introduce un premio al riesgo en la estimación de los rendimientos mediante el parámetro  $\alpha_3$ .<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_t + \alpha_3 \sigma_t^2 + a_t \\a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2,\end{aligned}\tag{14}$$

con  $\varepsilon_t \approx IID[0,1]$

### 1.3.4.3 TARCH<sup>7</sup>

Algo interesante en las series de tiempo financieras es que las malas noticias tienen un mayor efecto en la volatilidad que las buenas noticias, para muchos activos hay una correlación negativa entre los rendimientos y la futura volatilidad, es decir cuando en una serie existen rendimientos negativos van a generar un aumento en la volatilidad, así como al tener rendimientos positivos la volatilidad va a disminuir.

---

<sup>5</sup> Mean GARCH

<sup>6</sup> Modelo desarrollado por Engle, Lilien y Robins (1987).

<sup>7</sup> Treshold GARCH

Bajo el modelo TARARCH, las buenas y malas noticias van a tener diferentes efectos en la volatilidad y existirán dos regímenes diferentes, Cuando las perturbaciones sean negativas se incorporará el parámetro  $\beta_7$ <sup>8</sup> y cuando las perturbaciones en los rendimientos sean positivas, el parámetro  $\beta_7$  no se incorporará a la ecuación (15)<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + a_t \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2 + \beta_7 \rho a_{t-1}^2, \end{aligned} \quad \rho = \begin{cases} 1 & a_{t-1} < 0 \\ 0 & a_{t-1} > 0 \end{cases} \quad (15)$$

con  $\varepsilon_t \approx IID[0,1]$

La tendencia de la volatilidad a disminuir cuando los rendimientos aumentan y a aumentar cuando los rendimientos disminuyen es llamada efecto de apalancamiento.

### 1.3.4.4 EGARCH<sup>10</sup>

En este modelo, la volatilidad se estima mediante un modelo logarítmico de tal forma que no se requiere que el valor de los coeficientes sea positivo; además supone que la distribución de los errores es normal e incorpora la asimetría en la volatilidad en condiciones a la baja o a la alza en los mercados.<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + a_t \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \ln(\sigma_t^2) &= \beta_0 + \beta_3 \left| \frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta_4 \left| \frac{a_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \right| + \beta_5 \ln(\sigma_{t-1}^2), \end{aligned} \quad (16)$$

Con  $\varepsilon_t \approx IID[0,1]$

<sup>8</sup> El orden de los subíndices está dado de acuerdo a la tabla de resultados 5.1

<sup>9</sup> Modelo desarrollado por Glosten, Jaganathan y Runkle (1993).

<sup>10</sup> Exponential GARCH

<sup>11</sup> Modelo desarrollado por Nelson (1991)

### 1.3.4.5 PARCH<sup>12</sup>

Ding, Granger y Engle propusieron un modelo más general en el cual la potencia de los parámetros va a ser una variable endógena.<sup>13</sup> Por lo que  $\beta_6$  introduce un término de asimetría en respuesta a los shocks pasados y  $\delta$  corresponde a la óptima potencia estimada de los datos.

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_t + a_t \\a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^\delta &= \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^\delta + \beta_2 \sigma_{t-1}^\delta + \beta_6 |a_{t-1}|,\end{aligned}\tag{17}$$

con  $\varepsilon_t \approx IID[0,1]$

Se cree que al hacer endógena la potencia y al introducir un parámetro de asimetría, la dinámica de la estimación del modelo PARCH mejora significativamente la estimación de la volatilidad.

### 1.3.4.6 EWMA

Si las ponderaciones decrecen exponencialmente conforme nos movemos hacia observaciones más lejanas en el pasado; en específico  $\alpha_i = \lambda \alpha_{i-1}$ , con  $\lambda$  una constante entre cero y uno; se tiene el modelo conocido como EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), cuya fórmula es:<sup>14</sup>

$$\sigma_i^2 = \lambda a_{i-1}^2 + (1 - \lambda) \sigma_{i-1}^2,\tag{18}$$

---

<sup>12</sup> Power ARCH

<sup>13</sup> Modelo desarrollado por Ding, Granger y Engle (1993)

<sup>14</sup> Ecuación propuesta por Roberts (1959)



la cual puede interpretarse en el sentido de que el valor estimado para la varianza en la fecha  $t$  se puede calcular usando la información de la varianza en la fecha  $t-1$  y el rendimiento obtenido en la fecha  $t$ .

El modelo EWMA permite darle seguimiento a los cambios en la volatilidad del factor de mercado; el parámetro  $\lambda$  da la sensibilidad de respuesta del estimado de la volatilidad diaria a la nueva información disponible, es decir, determina el grado de reacción de la volatilidad a los eventos de mercado, mientras que  $(1-\lambda)$ , el coeficiente de la varianza del tiempo anterior, determina la persistencia en volatilidad. Una alta  $\lambda$  (cercana a uno) produce estimados que responden rápidamente a la nueva información de los cambios relativos del factor, en cambio una baja  $\lambda$  (cercana a cero) produce estimados de volatilidad que responden lentamente a la nueva información

### **1.3.5 Modelos Continuos de Volatilidad Estocástica**

En los modelos continuos el comportamiento de las variables va a ir cambiando a través del tiempo, y continuamente va a ir actualizando sus resultados dependiendo únicamente de lo que pasa en el periodo anterior. Para modelar continuamente la volatilidad se suelen usar ecuaciones diferenciales que describan las interacciones existentes entre los elementos del modelo.

Un modelo matemático en tiempo continuo fundamental para el desarrollo de la teoría financiera, es un proceso estocástico, en donde se trata de estimar el comportamiento de una o más variables aleatorias bajo un ambiente de incertidumbre, en donde las variables aleatorias pueden estar o no correlacionadas entre sí y además van a tener su propia distribución de probabilidad.

Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, etc.

Un ejemplo de un proceso estocástico usado extensamente en física y en finanzas es el movimiento browniano<sup>15</sup>, el cual se usará para modelar el comportamiento de una variable aleatoria a través del tiempo.

Vamos a definir un proceso estocástico  $(W_t, t \geq 0)$  como un movimiento Browniano si:

- i.  $W_0 = 0$
- ii. Fijados  $n$  instantes  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , los incrementos  $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$  son variables aleatorias independientes.
- iii. Si  $t > s$ , el incremento  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$
- iv. Las trayectorias del proceso son funciones continuas.
- v.  $E[W] = 0, \quad Var[W_T] = T$

El concepto de distribución normal ha sido esencial para el desarrollo de la teoría financiera y los resultados teóricos más conocidos se han obtenido bajo la hipótesis de normalidad para los rendimientos, por ello es que dos supuestos importantes para este trabajo van a ser que: los rendimientos son normales y los precios son log-normales. Bajo estos supuestos podemos modelar el comportamiento de los rendimientos de un activo financiero, en donde a partir de los precios diarios de las acciones, el rendimiento diario del activo estará dado por:

$$R = \left( \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

---

<sup>15</sup> El movimiento Browniano tiene su nombre gracias al Botánico Robert Brown (1828) quién observó en 1827 como las partículas de polen suspendidas en agua se mueven aleatoriamente a través del campo del microscopio.

El valor medio diario de los rendimientos del activo están dados por.

$$\mu = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N R_t \right), \quad (20)$$

Y la varianza diaria de los rendimientos del activo es.

$$\sigma^2 = \left( \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N (R_t - \mu)^2 \right), \quad (21)$$

Al estandarizar los rendimientos tenemos que:

$$\tilde{R}_t = \left( \frac{R_t - \mu}{\sigma} \right), \quad (22)$$

Al coincidir la función de densidad de una variable aleatoria  $\varepsilon \sim N(0,1)$  y el histograma de frecuencias de  $\tilde{R}_t$ , se puede considerar que los rendimientos tienen una distribución normal con media  $\mu$ \*día y varianza  $\sigma^2$ \*día. De esta forma se podría escribir:

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N R_t + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N (R_t - \mu)^2} \varepsilon \quad (23)$$

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \mu * \text{día} + \sqrt{\sigma^2 * \text{día}} \varepsilon, \quad (24)$$

Donde  $\varepsilon \sim N(0,1)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right] &= \mu * \text{día} \\ \text{Var} \left[ \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right] &= \sigma^2 * \text{día}, \end{aligned} \quad (25)$$

Si  $\Delta t$  denota un día, se puede escribir lo anterior de la siguiente forma

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

donde  $\varepsilon \sim N(0,1)$

Si  $\varepsilon \sim N(0,1)$ , entonces

$$\sqrt{T-t}\varepsilon \sim N(0, T-t)$$

$$\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon \sim N(0, \sigma^2(T-t)).$$

Por otro lado sabemos que  $dW_t \sim N(0, dt)$ , entonces

$$\sigma dW_t \sim N(0, \sigma^2 dt),$$

al verlo de forma discreta se tiene

$$\sigma\Delta W_t \sim N(0, \sigma^2(T-t)).$$

Si sustituimos

$$\frac{\Delta S}{S_{t-1}} = \mu\Delta t + \sigma\Delta W_t. \quad (27)$$

Al aplicar el límite a (27) cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , es decir se hace cada vez más pequeño.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (28)$$

donde  $dW_t \sim N(0, dt)$ ,  $\mu$  es el rendimiento medio esperado y  $\sigma$  es la desviación estándar (volatilidad) del rendimiento de la acción.  $S_t$  es el precio del activo que va a seguir un movimiento geométrico Browniano.  $dW_t$  va a medir las fluctuaciones de los rendimientos de cada día (Riesgo de Mercado).

Aún cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos de riesgos financieros y económicos, éste no puede, por si mismo, representar el comportamiento de todas las variables financieras que se encuentran en finanzas. Los precios de los activos no son descritos apropiadamente por el movimiento Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero. Sus incrementos podrían tener medias distintas de cero, o bien podrían tener varianzas que no necesariamente sean proporcionales al tiempo. En general los precios de los activos comienzan en valores diferentes de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero, varianzas que no son proporcionales al tiempo y covarianzas diferentes de cero.<sup>16</sup>

El movimiento geométrico Browniano se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Específicamente si  $W_t$  es un movimiento Browniano Estándar,  $\mu$  es una constante (tendencia),  $\sigma$  está dada por la volatilidad y  $S_0$  es un precio inicial conocido, entonces el proceso:

$$S_t = S_0 e^{\left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right]}. \quad (29)$$

es llamado movimiento geométrico Browniano. Este proceso es frecuentemente utilizado para describir el cambio porcentual del precio de un activo.

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W. \quad (30)$$

Por lo tanto la distribución de  $\ln(S_t)$  es normal con:

$$\begin{aligned} E[\ln(S_t)] &= \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \\ \text{Var}[\ln(S_t)] &= \sigma^2 t \end{aligned} \quad (31)$$

---

<sup>16</sup> Venegas (2006)

Sin embargo la volatilidad que hasta el momento hemos representado con la  $\sigma$  no es constante y requiere de un tratamiento adecuado modelándola como un proceso estocástico continuo e independiente, el cual va a ser un modelo de volatilidad estocástica, en donde la volatilidad  $v$  va cambiando de forma aleatoria de acuerdo a una ecuación diferencial estocástica en forma continua, del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} dy_t &= \mu_y dt + \sqrt{v_t} dw_t^y, \\ dv_t &= v_t \mu_v dt + v_t \sigma_v dw_t^v, \end{aligned} \tag{32}$$

que es conocido como el modelo Hull y White.<sup>17</sup>, donde:

$\mu_{y,v} \in \mathfrak{R}$ ,  $\sigma_v > 0$ ,  $\{W_t^y\}_{t \geq 0}$  y  $\{W_t^v\}_{t \geq 0}$  son movimientos Brownianos independientes.

La dinámica de la ecuación diferencial estocástica del precio del subyacente, implica que la media y la varianza condicional dependen exclusivamente del nivel actual de los precios, los cuales siguen un proceso de Markov, es decir, su evolución futura depende únicamente de su valor actual y no de su comportamiento pasado.

Este tipo de modelos tienen dificultad para su estimación debido a que son no Gaussianos, tienen un espacio de estado no lineal, y en pocas ocasiones se puede encontrar una solución única; por ello es que se usan modelos de simulación entre los cuales se encuentran los modelos MCMC.

---

<sup>17</sup> Hull and White (1987)

## **CAPÍTULO 2 PORTAFOLIO EFICIENTE**

En el capítulo anterior se definió el concepto de Valor en Riesgo y se explicaron las principales metodologías para su cálculo, en este capítulo se definirán los conceptos de un portafolio eficiente y la forma en la cual deben de elegirse los activos que lo componen.

Se entiende por un portafolio de valores a una determinada combinación de valores adquiridos por un inversionista, sin importar si es una persona física o moral, y que forman parte de su patrimonio. La elección de estos activos financieros (valores) no va a ser sencilla ya que va a depender del perfil de riesgo que quiera asumir y del rendimiento que desea obtener.

En el perfil de riesgos del inversionista se deben establecer los parámetros y límites de inversión de las diferentes clases de activos correspondientes a un objetivo financiero determinado y a un horizonte de tiempo.

El riesgo y la rentabilidad están directamente relacionados: cuanto más riesgo decida tomar un inversionista, mayor rentabilidad deberá esperar de las inversiones pero también puede ser mayor la pérdida. La tolerancia al riesgo va a depender de la situación personal, el horizonte y objetivos de la inversión.

En 1952 con su artículo "Portfolio Selection", Harry Markowitz inicio con la teoría de la selección de carteras, en donde al considerar los rendimientos de los activos como un proceso estocástico y centrarse exclusivamente en tres parámetros básicos: media, varianza y covarianza de los rendimientos de los activos, logró facilitar notablemente la selección de activos financieros para una cartera de valores.

El problema de selección de los activos financieros implica una incertidumbre ya que si ésta no existiera todos los inversionistas invertirían en el activo que ofreciera la más alta tasa de rendimiento, esto significa que la cartera estaría formada por un activo único con el más alto valor esperado, lo que eliminaría el concepto de la diversificación de la cartera. Por otra parte, el contexto de incertidumbre en el que se da necesariamente el proceso de inversión, requiere incorporar alguna hipótesis del comportamiento del inversionista cuando se enfrenta a las opciones de inversión desconociendo con certeza el resultado futuro de las mismas.

Se dice que cuando los ahorradores invierten en varios activos existe diversificación y es con el objeto de que los rendimientos de los diversos activos no se muevan al mismo ritmo o en la misma dirección y de esta forma sus riesgos no estarían perfectamente correlacionados. De esta forma, el rendimiento de una cartera diversificada tiende a ser más estable que los rendimientos de los activos particulares que componen la cartera.

El rendimiento de un portafolio de activos está dado por el peso ponderado de los rendimientos de los activos individuales. El peso aplicado a cada retorno es la fracción del portafolio invertido en cada activo. Si  $R_i$  es rendimiento del activo  $i$ ,  $x_i$  es la fracción que el inversor va a invertir en el activo  $i$  y  $R_p$  es el Rendimiento del Portafolio, el rendimiento del portafolio se calcula con:

:

$$R_p = \sum_{i=1}^N x_i R_i, \quad (33)$$

En donde, la suma de las ponderaciones debe ser igual a la unidad, de manera que:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1. \quad (34)$$



En este caso, el portafolio de inversión estará formado por algunos componentes cuyas ponderaciones son negativas (ventas en corto) y otros con ponderaciones superiores a la unidad sin dejar de satisfacer esta restricción. Pero si la venta en corto no es factible o deseable, debemos agregar como restricción que todos los ponderadores deben ser no negativos, esto es:

$$x_i \geq 0 \quad i = (1, 2, \dots, N).$$

La variabilidad del rendimiento posible contra el rendimiento esperado se conoce estadísticamente como la desviación estándar y para poder obtenerla se debe de aplicar la raíz cuadrada a la varianza, que es el valor esperado de las desviaciones al cuadrado del rendimiento del portafolio y la media de los rendimientos del portafolio. La varianza se representa como  $\sigma_p^2$  y se calcula a partir de.

$$\sigma_p^2 = E\left(R_p - \overline{R_p}\right)^2. \quad (35)$$

La desviación estándar es utilizada como medida del riesgo ya que trata tanto las desviaciones negativas como las positivas de igual manera. Dado que la mayoría de los rendimientos de los instrumentos financieros se comportan con una distribución normal de probabilidad, la desviación estándar se ajusta perfectamente como medida de riesgo. Y está dada por  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}. \quad (36)$$

Si lo escribimos en términos del peso que tiene cada uno de los activos en el portafolio, tenemos.

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq j}}^N x_j x_k \sigma_{jk}, \quad (37)$$

el término  $\sigma_{jk}$  es la covarianza, la cual es una medida estadística que mide la relación entre dos variables aleatorias. Esto significa que es una medida de cómo se mueven dos variables aleatorias. Un valor positivo de la covarianza significa que los rendimientos de estos valores tienden a moverse en la misma dirección. Un valor negativo significa una tendencia contraria. Un valor muy bajo o de cero significa que hay muy poca o ninguna relación entre los rendimientos de ambos valores.

Por lo tanto la desviación estándar del portafolio está dada por:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq j}}^N x_j x_k \sigma_{jk}}. \quad (38)$$

La correlación es una medida estadística muy relacionada con la covarianza, de hecho, resulta de dividir la covarianza de dos variables aleatorias entre el producto de sus desviaciones estándar. Lo que hace la correlación es cambiar la escala de la covarianza para facilitar la comparación no importando la escala de las variables.

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (39)$$

los coeficientes de correlación siempre están entre  $-1$  y  $1$ . Un valor de  $-1$  representa correlación negativa perfecta, lo que quiere decir que varían en forma inversa en la misma proporción. Una correlación de  $1$  representa una correlación positiva perfecta, implicando un movimiento de ambas variables en la misma dirección y en la misma proporción.

De acuerdo a la ecuación (33), el rendimiento de un portafolio de inversión formado únicamente por dos activos financieros se calculará mediante:

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2, \quad (40)$$

y la desviación estándar del portafolio se obtiene a partir de la ecuación (38), en donde:

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{1,2}}, \quad (41)$$

El coeficiente de correlación entre los dos activos financieros será  $\rho_{1,2}$  y se calcula con:

$$\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1 \sigma_2} \quad -1 \leq \rho_{1,2} \leq 1, \quad (42)$$

al sustituir (42) en (41), tenemos:

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2}, \quad (43)$$

en donde, si  $\rho < 1$ , gracias a la diversificación, la desviación estándar de un portafolio compuesto por dos activos financieros va a ser menor que la suma ponderada de las desviaciones estándar de los activos individuales.<sup>18 Y 19</sup>

Por ejemplo, si la acción A tiene una desviación estándar de 2.3104% y un rendimiento de 0.1984% en 510 días y la acción B tiene una desviación estándar de 2.0636% y un rendimiento de 0.2151% en 510 días, una combinación de igual ponderación de ambas acciones en un portafolio de inversión, teniendo un coeficiente de correlación  $\rho = 0.20$ , va a generar que la desviación estándar conjunta sea de 2.075% con un rendimiento de 0.1666%, debido a la diversificación de la cartera.

---

<sup>18</sup> Ross S., Westerfield R., Jaffe J., Jordan B., (2008).

<sup>19</sup> Copeland T., Weston J., Shastri K., (2005).

El inversionista que busca obtener el más bajo riesgo posible y el mayor rendimiento y va a estar dispuesto a intercambiar el uno por el otro se llama inversionista de Markowitz. El riesgo financiero se va a medir mediante la desviación estándar de los rendimientos y puesto que no es fácil encontrar activos financieros que al mismo tiempo tengan los rendimientos esperados más altos y el riesgo más bajo tendrá que diversificar su cartera dependiendo de la tasa personal a la que esté dispuesto a intercambiar el riesgo por rendimiento; no todos los inversionistas van a tener el mismo grado de sensibilidad ante el riesgo lo que se va a convertir en una medida variable y subjetiva.

Como toda teoría, el enfoque de Markowitz tiene una serie de supuestos:

1. La selección de inversiones se refiere para un periodo.
2. Las preferencias entre riesgo y rendimiento del inversionista pueden expresarse gráficamente en un espacio definido por la varianza o desviación estándar y la expectativa de rendimiento.
3. Existen en el mercado de capitales  $n$  activos con los cuales formar un portafolio (una combinación).
4. Para cada uno de estos activos se puede calcular la esperanza matemática del rendimiento, su varianza (o su desviación estándar) y las covarianzas de cada uno de los activos con respecto a cada todos los demás considerados.
5. Los activos son perfectamente divisibles, es decir se pueden fraccionar.
6. No se van a considerar costos de transacción, ni impuestos ni comisiones.
7. El mercado en el que se intercambian los activos es de competencia. No se consideran asimetrías de información o de poder de mercado.

Uno de los resultados más importantes del trabajo de Markowitz es el de hacer combinaciones de activos que cumplan simultáneamente con dos condiciones:

- Tener la varianza mínima dentro de todas las combinaciones posibles que tienen un rendimiento esperado, en donde tratamos de minimizar la varianza sujeta a tres restricciones, la primera restricción es de rendimiento, en la segunda restricción la suma de las ponderaciones de los activos financieros en el portafolio es de 1, y en la tercera restricción evitará que existan ventas en corto.

$$Min(\sigma_p^2) = \sum_{j=1}^N x_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq j}}^N x_j x_k \sigma_{jk} \quad (44)$$

Sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$x_i$  Es la fracción que el inversor va a invertir en el activo i.

$\sigma_p^2$  Es la varianza del portafolio.

$\sigma_{jk}$  Es la covarianza de los activos j y k.

$R_p$  Es el Rendimiento del Portafolio

$R_i$  Es el rendimiento del activo i

- Tener el rendimiento esperado máximo dentro de todas las combinaciones posibles que tienen una varianza dada, en donde el objeto es maximizar el rendimiento esperado sujeta a tres restricciones, la primera restricción es de la varianza, en la segunda restricción la suma de las ponderaciones de los activos financieros en el portafolio es de 1, y en la tercera restricción evitará que existan ventas en corto.

$$Max(R_p) = \sum_{i=1}^n r_i x_i \tag{45}$$

Sujeto a:

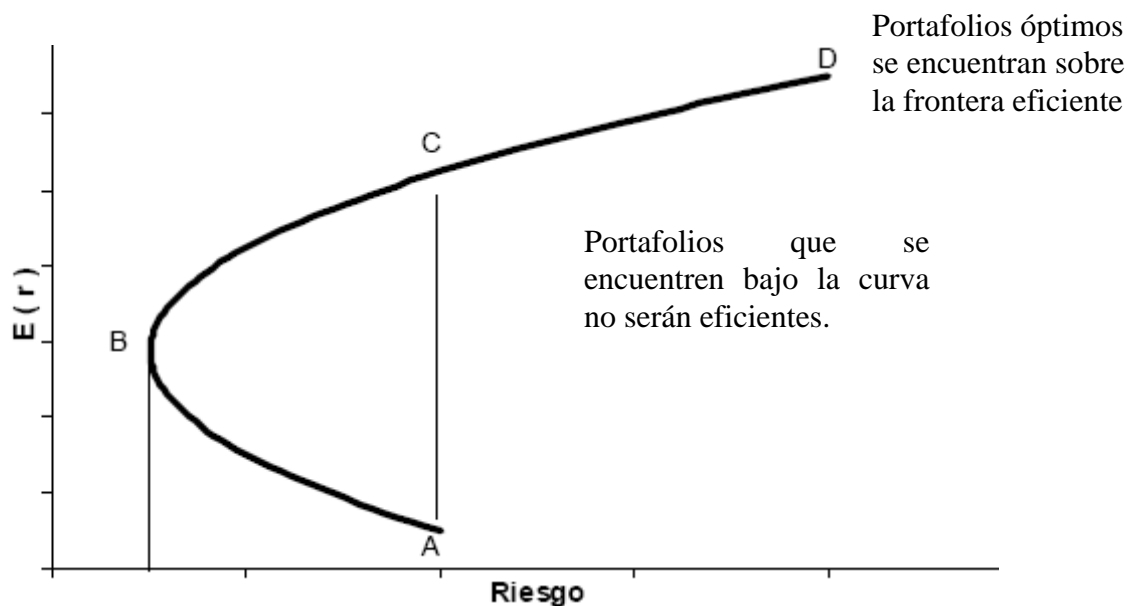
$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq j}}^N x_j x_k \sigma_{jk}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo a partir de programación lineal Maximizando el rendimiento o minimizando la varianza bajo ciertas restricciones.

Todas aquellas combinaciones que reúnen estos requisitos son llamados portafolios eficientes y juntos en conjunto van a conformar la frontera de portafolios eficientes.



Gráfica 2.1. Curva de la Frontera eficiente.

La curva que se presenta en la Gráfica 2.1 representa a la varianza mínima.

El Punto B es aquel portafolio formado por los activos cuya combinación tenga la menor desviación estándar y es llamado punto de varianza mínima global.

El segmento AB va a tener combinaciones que no serán escogidas por los inversionistas racionales de Markowitz, porque cualquier portafolio que se encuentre en el segmento BC ofrece a cada nivel de riesgo un superior rendimiento esperado.

El segmento BD va a representar los portafolios con combinación de activos que ofrezcan a cada rendimiento el menor riesgo posible y se va a denominar como la frontera eficiente. Los portafolios que están por debajo de la gráfica representan a carteras no eficientes, es decir, para una determinada varianza tienen menos rentabilidad esperada de la posible o para un determinado rendimiento tienen una varianza mayor a la posible.

Por encima de la frontera eficiente no existe solución posible con los datos de rentabilidad esperada y varianzas y covarianzas dadas en el modelo.

La mayor o menor concavidad de la curva dependerá de la correlación que exista entre los distintos activos. Si la correlación entre los activos es 1, la frontera eficiente será una línea recta en B y D; a medida que la correlación disminuye se tornará más cóncava. Si bien todos los portafolios de la frontera eficiente alcanzan un máximo de diversificación, la elección por parte del inversionista va a depender de su grado de aversión al riesgo, es decir los muy aversos al riesgo elegirán portafolios cerca del portafolio B y los inversionistas más agresivos elegirán portafolios cercanos al portafolio D, con mayor retorno y riesgo.

Para permitir ventas en corto, debe eliminarse la última restricción de las ecuaciones (33) y (34), de esta forma podrían estimarse ponderaciones negativas para cada uno de los activos, lo que implica que el portafolio puede estar constituido por algunos componentes que son pasivos, es decir la venta de un activo que ha sido tomado en préstamo para venderlo, con la promesa de recomprar en una fecha futura. Las ventas en corto son muy usadas en los

mercados financieros ya que permiten obtener ganancias cuando las expectativas del mercado son a la baja.

Por simplicidad en los cálculos, se va a suponer en este trabajo que no están permitidas las ventas en corto, por lo que la última restricción de las ecuaciones (44) y (45) va a ser necesaria.

No es fácil determinar con cuantas acciones diversificar un portafolio, Elton y Gruber<sup>20</sup> dicen que a partir de 8 acciones, se puede diversificar aproximadamente el 83% de la desviación estándar respecto del máximo y que la diversificación va a depender del número de acciones que compongan al portafolio. Sin embargo Markowitz, demostró que la clave para diversificar un portafolio no estaba simplemente en el número de acciones que lo componen, sino también y más importante aun, en la correlación de los retornos de las acciones que lo conforman.

Si los retornos están fuertemente correlacionados, en efecto, el portafolio no se podrá diversificar, y si la correlación es baja, se podrá diversificar y el riesgo será mucho menor. Un inversionista puede calcular las correlaciones históricas y las covarianzas entre las acciones que conforman el portafolio.

Sin embargo, a nivel práctico el modelo presenta algún grado de dificultad. Primero, la complejidad de su desarrollo estadístico, así, para hallar la matriz de covarianzas hay que relacionar todos los valores dos a dos y calcular varianzas y covarianzas, complicándose aún mas para portafolios con un número considerable de acciones. Segundo, los datos para tener en cuenta, son los rendimientos y riesgos históricos y se supone que en el futuro serán similares. Esta suposición es demasiado fuerte en la mayoría de los casos porque es lo mismo que suponer que la inercia del mercado es total en el futuro. Sin embargo, este conflicto lo presentan todos los modelos de comportamiento bursátil.

---

<sup>20</sup> Elton, E.J. y Gruber, M.J.(1977)



A partir de estos conceptos básicos en el capítulo cuatro se va a construir un portafolio que se encuentre dentro de la frontera eficiente a partir del cual se estimará el Valor en Riesgo mediante diferentes metodologías.

## CAPÍTULO 3 FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA BAYESIANA Y MODELOS MCMC

En este capítulo se definirán los conceptos de estadística bayesiana, cadenas de Markov y simulación Monte Carlo, como también se describirá el modelo de Simulación Monte Carlo con Cadenas de Markov que se usará para simular los modelos de volatilidad estocástica y calcular el Valor en Riesgo.

### 3.1 Estadística Bayesiana

La mayor parte de los métodos estadísticos están basados en la estadística clásica (frecuentistas), en donde los parámetros de los modelos van a ser fijos y desconocidos y se usarán los datos para hacer inferencia de ellos.

En los modelos paramétricos con estadística Bayesiana, se van a asumir que los parámetros son variables aleatorias por lo que vamos a suponer una distribución a priori que va a reflejar cualquier información que se tenga de ellos. La distribución en la que nos vamos a interesar es la a posteriori que va a depender del modelo paramétrico usado, los datos y la distribución a priori.<sup>21</sup>

La estadística bayesiana tiene un entorno de trabajo propio y diferente a la estadística clásica, la diferencia fundamental entre estas dos viene del concepto de probabilidad, ya que para los frecuentistas la probabilidad es un concepto objetivo que se encuentra en la naturaleza, mientras que para la estadística bayesiana se encuentra en el observador, siendo un concepto subjetivo.

Se va a considerar un modelo paramétrico con parámetros  $\theta$ , la función de distribución a priori de probabilidad de  $\theta$  va a denotarse con  $P(\theta)$ , los datos observados van a ser los rendimientos y se denotarán con  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y la función de distribución de probabilidad conjunta de los datos y los parámetros va a ser  $P(Y, \theta)$ . Entonces usando el teorema de Bayes:

---

<sup>21</sup> Gilks W., Richardson S., Spiegelhalter D., (1996).

$$P(Y, \theta) = P(Y|\theta)P(\theta), \quad (46)$$

y

$$P(Y, \theta) = P(\theta|Y)P(Y). \quad (47)$$

Si igualamos (46) y (47):

$$P(\theta|Y)P(Y) \propto P(Y|\theta)P(\theta). \quad (48)$$

Pero los datos son observados y fijos, por lo que  $P(Y) = 1$ , entonces:

$$P(\theta|Y) \propto P(Y|\theta)P(\theta), \quad (49)$$

- $P(\theta|Y)$  es la distribución a posteriori.
- $P(Y|\theta)$  es la función de verosimilitud.
- $P(\theta)$  es la función de distribución no condicional de los parámetros.
- $P(Y)$  es la distribución no condicional de los datos, la cual también se puede escribir como:

$$P(Y) = \int P(Y|\theta)P(\theta)d\theta, \quad (50)$$

y el objetivo va a ser encontrar el comportamiento de los parámetros a partir de los datos de la ecuación (49), tomando en cuenta la función de distribución de probabilidad de los datos y la distribución a priori de los parámetros.

En estadística Bayesiana es prácticamente imposible obtener analíticamente la distribución a posteriori así como obtener su media y varianza de una serie de datos; debido a que los métodos analíticos son limitados se usa simulación Monte Carlo sin embargo la simulación directa de distribuciones de altas dimensiones suele ser difícil y en ocasiones imposible.

Por ello es que se va a construir una cadena de Markov la cual tiene una distribución estacionaria como herramienta para las iteraciones de Monte Carlo y

así generar datos de la distribución a posteriori, técnica a la que se le conoce como Cadenas de Markov y Simulación Montecarlo ó MCMC (Markov Chain Monte Carlo simulation)<sup>22</sup>

### 3.2 Cadena de Markov

Una cadena de Markov<sup>23</sup> es una serie de eventos en donde la probabilidad que ocurra un evento depende del evento anterior inmediato. Las cadenas de Markov sirven para analizar el comportamiento de determinados tipos de procesos estocásticos y representan un sistema que varía su estado a lo largo del tiempo, existiendo en cada cambio una transición, estos cambios no están predeterminados, aunque si lo está la probabilidad del próximo estado en función de los estados anteriores, probabilidad que va a ser constante a lo largo del tiempo.

Se dice que un proceso estocástico es una cadena cuando el espacio de estados es discreto, es decir  $S \in \{0,1,2,\dots\}$ , y una cadena de Markov en tiempo discreto es un proceso estocástico en el que  $S$  es discreto y  $T$  también lo es.

$$\begin{aligned} \text{Proceso estocastico: } \{Y_n : n = 0,1,2,\dots\}, S = \{0,1,2,\dots\} \\ P(Y_n \in A | Y_{n-1} = y_{n-1}, Y_{n-2} = y_{n-2}, \dots, Y_0 = y_0) = P(Y_n \in A | Y_{n-1} = y_{n-1}). \end{aligned} \quad (51)$$

Una cadena de Markov  $\{Y_n, n \geq 0\}$  es un proceso estocástico que satisface la propiedad de pérdida de memoria, en donde el futuro es independiente del pasado, dado el estado presente del proceso.

Los estados en las cadenas de Markov se pueden clasificar de la siguiente forma:

---

<sup>22</sup> Técnica usada por primera vez en Hastings (1970)

<sup>23</sup> Reciben su nombre del matemático ruso Andrei Markov

**Accesible:**  $l$  es accesible desde  $k$  si hay alguna secuencia de transiciones de  $k$  a  $l$  con probabilidad no nula, en donde:

$$n > 0$$
$$P_{kl}(n) > 0$$

**Comunicantes:** los estados  $k$  y  $l$  son comunicantes, solo si son accesibles entre si; en donde si representamos  $k \leftrightarrow l$  y  $l \leftrightarrow m$  entonces también podemos encontrar que  $k \leftrightarrow m$ .

**Absorbente:** Un estado absorbente es aquel en que  $P_{kk} = 1$ , por lo cual es imposible abandonarlo.

**Recurrente:** El estado  $k$  es recurrente, si la probabilidad de regresar alguna vez a él es de 1.

$$\sum_1^{\infty} P_{kk} = 1,$$

un estado  $i$  es recurrente positivo si el tiempo esperado hasta que la cadena vuelva al estado  $i$  partiendo de éste es finito.

Un estado  $i$  es recurrente nulo si el tiempo esperado hasta que la cadena vuelva a  $i$  desde éste es infinito.

**Periódico:** Un estado es periódico con periodo  $d$ , solo si se puede regresar a él después de  $d$  pasos.

**Aperiódico:** Un estado es aperiódico, o con periodo  $d=1$ , si se puede regresar a él en cualquier momento.

**Transitorio:** Un estado es transitorio, si la probabilidad de regresar a él alguna vez es menor que 1.

Existen los siguientes tipos de cadenas de Markov:

- **Irreducible**, si para toda  $i$  y  $j$ , existe  $n$  tal que  $P_{ij}^n > 0$ . En una cadena irreducible son todos los estados recurrentes o transitorios.
- **Aperiódica**, si el mayor de los divisores comunes de  $\{n; P_{ij}^n > 0\} = 1$ .
- **Absorbente**, si tiene al menos un estado absorbente accesible desde cualquier otro estado.
- **Regular**, Si es posible ir de un estado a otro exactamente en  $n$  pasos en donde:

$$n > 0$$

$$P_{kl}(n) > 0$$

- **Recurrente**, si  $P(\text{La cadena de Markov regresa a } i | \text{inicio en } i) = 1$ , para toda  $i$  y es *recurrente positiva*,
- **Ergódica**, si es irreducible, aperiódica y recurrente y  $\{\pi_j\}$  es la colección de probabilidades, tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \pi_j$$

Y

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j$$

Las probabilidades de transición a un paso se definen como la probabilidad de ir del estado  $i$  al estado  $j$  desde el instante  $n$  al instante  $n+1$ .

$$P_{ij}(n) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i).$$

Una cadena de Markov de tiempo discreto es homogénea si las probabilidades de transición no dependen del instante  $n$ .

$$P_{ij}(n) = P_{ij}(n+m) = P_{ij}.$$

La condicionalidad de los datos se describe por la propiedad de pérdida de memoria, mediante las cadenas de Markov; la generación de los parámetros en el modelo MCMC se lleva a cabo mediante la simulación Monte Carlo que se explica en la siguiente sección.

### **3.3 Simulación Monte Carlo<sup>24</sup>**

La Simulación es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora. A través de los experimentos se trata de describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real comprendiendo en cada experimento ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas.

Las etapas del proceso de simulación son los siguientes:

- **Definición, descripción del problema**

Para poder simular es necesario hacer un análisis preliminar de éste, determinando la interacción con otros sistemas, las restricciones, variables que interactúan y sus interrelaciones.

---

<sup>24</sup> Es llamado así por el principado de Mónaco al ser considerado la capital del juego de azar, donde se generaban números aleatorios mediante una ruleta,

- **Formulación del modelo.**

Se define y construye el modelo que se va a implementar a partir de todas las variables aleatorias y las relaciones que puedan tener entre ellas.

- **Colección de Datos**

Se depuran y organizan los datos que el modelo usará para poder obtener resultados.

- **Programación**

Introducir el algoritmo formulado a una computadora, para que mediante iteraciones obtengamos resultados.

- **Verificación y Validación del modelo**

A través de la verificación se pueden detallar las deficiencias que tenga el modelo, mediante la exactitud en la predicción y la comparación con otros modelos similares.

- **Interpretación Probabilística de Resultados**

En los modelos financieros van a existir varias variables aleatorias interactuando, y estas variables, siguen distribuciones de probabilidad teóricas o empíricas distintas a la distribución uniforme. Por esta razón, para simular este tipo de variables, es necesario contar con un generador de números uniformes y una función que a través de un método específico, transforme estos números en valores de distribución normal.



Existen varios procedimientos para lograr este objetivo, en este trabajo se adoptó el siguiente procedimiento especial para generar números al azar que sigan la distribución de probabilidad.

Para cada tipo de distribución continua, se puede montar una función estocástica; en nuestro caso, una distribución normal puede ser expresado por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (52)$$

en donde  $-\infty < x < \infty$

al expresar la distribución acumulada de la distribución normal, se usará el teorema del límite central, el cual establece que la suma de  $n$  variables aleatorias independientes se aproxima a una distribución normal a medida que  $n$  se aproxima a infinito.

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una secuencia de  $n$  variables aleatorias independientes con  $E(x) = \mu_i$  y  $\text{var}(x) = \sigma_i^2$  (ambas finitas) y  $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ , entonces bajo ciertas condiciones generales:

$$Z = \frac{Y - \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \mu_i^2}} \quad (53)$$

tiene una distribución normal estándar a medida que  $n$  se aproxima a infinito.<sup>25</sup>

---

<sup>25</sup> Périssé M., Pepe M.

La simulación Monte Carlo provee como resultado aproximaciones para las distribuciones de probabilidades de los parámetros que están siendo estudiados, y dependiendo del problema pueden usarse diferentes distribuciones de probabilidad,

La simulación Monte Carlo se usa principalmente para generar escenarios o para resolver integrales que no son fáciles de resolver por métodos analíticos, para lo cual se usan números aleatorios, también se usa la simulación Monte Carlo para resolver problemas estocásticos y problemas determinísticos.

El algoritmo de la simulación Monte Carlo se fundamenta en la generación de números aleatorios por el método de Transformación inversa, el cual se basa en las distribuciones acumuladas de frecuencias:

- Determinar las V.A. y sus distribuciones acumuladas
- Generar un número aleatorio uniforme  $\in (0,1)$
- Determinar el valor de la V.A. para el número aleatorio generado de acuerdo a las clases que tengamos.
- Calcular media, desviación estándar error y realizar el histograma.
- Analizar resultados para distintos tamaños de muestra.

Por lo tanto la simulación de Monte Carlo va ser un proceso computacional que partiendo de distribuciones de probabilidad de alguna o todas las variables de entrada se van a generar números aleatorios que a su vez van a derivar en una distribución de probabilidad para una salida después de una corrida de la simulación.

### 3.4 Simulación Monte Carlo vía Cadenas de Markov

Las técnicas de Monte Carlo vía cadenas de Markov van a permitir la resolución de problemas que no son tratables analíticamente y que requieren aproximaciones numéricas para su resolución, es decir, iterativamente se va muestrear la distribución a posteriori mediante una cadena de Markov que sea fácil de simular y cuya distribución estacionaria corresponda a la distribución final que es de nuestro interés.

Sea  $\theta_{(1)}, \theta_{(2)}, \dots$  una cadena de Markov homogénea, irreducible, aperiódica y con distribución de equilibrio  $p(\theta|Y)$ ; entonces conforme  $t \rightarrow \infty$ .<sup>26</sup>

- i)  $\theta_{(t)} \xrightarrow{D} \theta$ , donde  $\theta \sim p(\theta|Y)$
- ii)  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(\theta_{(t)}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E(g(\theta)|Y)$ .

Para poder hacer la simulación Monte Carlo se van a construir cadenas de Markov de números aleatorios, en donde esos números aleatorios que serán generados dependen únicamente del estado actual de la cadena.

#### 3.4.1 Generación de los Parámetros

Como ya se comentó se tratará de obtener  $P(\theta|Y)P(Y) \propto P(Y|\theta)P(\theta)$  a partir de la función de verosimilitud y la distribución a priori de los parámetros. Todos los algoritmos usados para la generación de parámetros están basados en la

---

<sup>26</sup> Martel M., Vázquez F.,

construcción de una función de transición que defina una cadena de Markov irreducible en donde la distribución final sea estacionaria.<sup>27</sup>

### 3.4.1.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings

Para el algoritmo de Metropolis-Hastings en cada tiempo  $t$ , el siguiente estado  $\theta^{(g+1)}$  es elegido a partir de un candidato de una distribución de probabilidad propuesta  $q(\theta^{(g+1)}|\theta^{(g)})$  la cual va a depender de la actual posición de  $Y_t$ .

El algoritmo va a generar de forma iterativa los parámetros y cada uno de ellos va a ser aceptado o rechazado dependiendo de una probabilidad de aceptación  $\alpha(\theta^{(g+1)}, \theta^{(g)})$  en donde:

$$\alpha(\theta^{(g+1)}, \theta^{(g)}) = \min\left(\frac{\pi(\theta^{(g+1)})q(\theta^{(g)}|\theta^{(g+1)})}{\pi(\theta^{(g)})q(\theta^{(g+1)}|\theta^{(g)})}, 1\right) \quad (54)$$

Donde  $\pi$  se refiere a la distribución de equilibrio o distribución estacionaria.

Los pasos que sigue el algoritmo de Metropolis Hastings son:

Paso 1: Genera el parámetro  $\theta^{(g+1)}$  de la distribución propuesta  $q(\theta^{(g+1)}|\theta^{(g)})$ .

Paso 2: Acepta el parámetro  $\theta^{(g+1)}$  con probabilidad  $\alpha(\theta^{(g+1)}, \theta^{(g)})$ .

---

<sup>27</sup> <sup>27</sup> Gilks W., Richardson S., Spiegelhalter D., (1996).

### 3.4.1.2 Algoritmo de Gibbs

El algoritmo de Gibbs es un caso especial del algoritmo de Metropolis Hasting donde:  $q(\theta^{(g+1)}|\theta^{(g)})\propto P(\theta^{(g+1)})$ , lo que implica que la probabilidad de que el parámetro sea aceptado es siempre de 1.

$$\alpha(\theta^{(g+1)},\theta^{(g)})=1 \tag{55}$$

El algoritmo de Gibbs tiene su nombre gracias a Geman y Geman quienes lo utilizaron por primera vez en 1984 en su artículo “Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images”, hoy en día esta metodología ha sido utilizada en diferentes áreas, permitiendo generar parámetros en medicina, biología, física y economía.

Los pasos que sigue el algoritmo de Gibbs son:

Paso 1: Genera el parámetro  $\theta^{(g+1)}$  de la distribución propuesta  $q(\theta^{(g+1)}|\theta^{(g)})$ .

Paso 2: Acepta el parámetro  $\theta^{(g+1)}$  con probabilidad de 1.

La generación de los parámetros en la simulación se realizará mediante el generador de Gibbs, el cual generará sucesiva y repetidamente de la distribución condicional de cada componente dado los otros componentes, el algoritmo de Gibbs es:

- 1.- Inicializar con  $\theta = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$ .
- 2.- Simular  $\theta_1^{(1)}$  de la condicional  $\theta_1 | (\theta_2^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$ .
- 3.- Simular  $\theta_2^{(1)}$  de la condicional  $\theta_2 | (\theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$ .

4.- ...

5.- Simular  $\theta_d^{(1)}$  de la condicional  $\theta_d | (\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_{d-1}^{(1)})$

6.- Hacer iteraciones de este procedimiento.

Bajo condiciones poco rigurosas, la convergencia de la cadena de Markov a la distribución estacionaria  $P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$  está garantizada, de tal forma que después de algún número de iteraciones:

$$(\theta_1^{(k)}, \dots, \theta_d^{(k)}), \dots, (\theta_1^{(n)}, \dots, \theta_d^{(n)})$$

Este proceso exige que sea fácil muestrear a partir de las distribuciones condicionales completas, además de que no es necesario visitar cada condicional en el orden natural arriba utilizado, el resultado es válido cualquiera que sea el orden con tal de que cada condicional sea visitada con una frecuencia infinita (Geman y Geman, 1984)

### 3.4.2 Valores Iniciales

Existe poca información sobre este tema, sin embargo si la cadena es irreducible, la elección de los valores iniciales no afectará a la distribución estacionaria. Para una cadena que converja rápidamente no importa lo extremos que puedan llegar a ser los valores iniciales porque después de pocas iteraciones va a converger. Para una cadena que converja lentamente es importante la elección de los valores iniciales de esta forma no será tan larga la cadena. Gelman and Rubin<sup>28</sup> sugieren múltiples cadenas y elegir valores iniciales dispersos para cada una de ellas, de esta forma se puede seleccionar el valor inicial en el cual la cadena converja de una mejor forma.

---

<sup>28</sup> Gelman and Rubin (1992a,b)

### 3.4.3 Número de Iteraciones

Decidir en que momento parar la cadena es importante, mientras más larga sea la cadena, mayor va a ser la precisión en la estimación.

La mejor forma para determinar la longitud  $n$  de la cadena es correr varias cadenas en forma paralela, con diferentes valores iniciales y comparar la precisión y la convergencia de cada una de ellas; si no son adecuados los resultados entonces habrá que incrementar la longitud.

### 3.4.4 Número de Cadenas

Existe un conflicto en la literatura sobre desarrollar muchas cadenas con pocas iteraciones y desarrollar una sola cadena con una larga longitud. El tener varias cadenas puede servir para hacer comparación entre ellas y demostrar la convergencia, mientras que al tener una sola cadena con  $n$  muy grande sirve para asegurar la convergencia de una cadena única.

### 3.4.5 Burn-In

Habitualmente, se usa la primera parte de los datos generados por la cadena de Markov como datos de burn-in para que la cadena olvide su estado inicial, de modo que para la estimación sólo se utiliza la última parte de los datos generados.

La longitud del Burn-in ( $m$ ) va a depender de la tasa de convergencia y que tan similares son las distribuciones a priori y a posteriori. La forma más común para identificar el tamaño de  $m$  es observando las gráficas resultantes y eliminando los datos en los cuales existe mucha variación, si gráficamente la cadena converge rápidamente, entonces la longitud de ( $m$ ) va a ser corta con respecto al tamaño de la cadena.

### 3.4.6 Convergencia

Los algoritmos MCMC tienen dos problemas fundamentales: el determinar la convergencia y seleccionar los valores iniciales idóneos.

Para el algoritmo de Gibbs son irrelevantes los valores iniciales ya que va a converger para cualquier valor inicial, sin embargo es crítico el punto inicial si se quiere tener una convergencia rápida.

Para determinar la convergencia lo óptimo es ver gráficamente el comportamiento de los parámetros y en base a esto determinar el número de iteraciones. En el caso particular del muestreo de Gibbs la velocidad de convergencia depende fuertemente de la correlación entre los componentes del vector  $\theta$  bajo la distribución final  $p(\theta|Y)$  entre más alta sea la correlación más lenta será la convergencia.

### 3.4.7 Análisis de los Resultados

En inferencia Bayesiana es usual encontrar la distribución posterior en términos de medias, desviaciones estándar, correlaciones, intervalos de confianza y distribuciones marginales.

Se estima por ejemplo la media a posteriori de  $\theta$  usando:

$$E[\theta|Y] = \frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n \theta_t \quad (56)$$

Donde  $m$  es el número de iteraciones de burn-in y  $n$  es el número total de iteraciones.



En este capítulo se revisaron los conceptos de la técnica de Monte Carlo vía cadenas de Markov que va a permitir la resolución de problemas difícil de tratar analíticamente, mediante una serie de iteraciones hasta muestrear la distribución de los parámetros, en el capítulo 4 se plantearán los objetivos de este trabajo y se describirá la metodología.

## **CAPÍTULO 4 MARCO METODOLÓGICO**

### **4.1 Justificación**

La investigación en Finanzas se ha desarrollado ampliamente en los últimos años, de tal forma que constantemente se han generado nuevos modelos para estimar de una forma más aproximada lo que pasa en los mercados financieros; algunos de estos modelos son los de volatilidad estocástica en tiempo continuo, los cuales generalmente son difíciles de resolver debido a que incorporan ecuaciones diferenciales, y en muchos casos la única forma de llegar a un resultado es mediante simulaciones, que pueden llegar a ser muy tardadas y ocupar mucho tiempo computacional.

Por ello es importante implementar nuevas metodologías para la simulación de estas ecuaciones, en donde se ocupe menor tiempo computacional y se pueda tener igual o mayor exactitud que con las metodologías usadas actualmente.

Una aplicación de los modelos econométricos en tiempo discreto y de los modelos de volatilidad estocástica está en el cálculo del VaR, y debido a la importancia de este resultado para tomar decisiones y el análisis de riesgo en las instituciones financieras, es que se pretende enfocar el uso del modelo MCMC en el cálculo de este valor.

### **4.2 Objetivo General**

El objetivo de este trabajo es incorporar el modelo de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo en la estimación de la volatilidad para poder estimar el Valor en Riesgo, usando un modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo, a partir de un portafolio compuesto por acciones que forman parte del Índice de Precios y Cotizaciones del mercado accionario mexicano.

### **4.3 Objetivos Específicos**

- Encontrar, mediante la metodología de Markowitz, el portafolio de mínima varianza.
- Estimar los parámetros de los modelos econométricos en tiempo discreto mediante funciones de Máxima Verosimilitud de los rendimientos del portafolio
- Estimar los parámetros del modelo econométrico en tiempo continuo mediante el modelo de Cadenas de Markov y Simulación Monte Carlo, de los rendimientos del portafolio elegido.
- Calcular el Valor en Riesgo del portafolio, a partir de los modelos econométricos en tiempo discreto y los modelos de volatilidad estocástica.

### **4.4 Hipótesis**

El resultado del VaR estimado con el modelo Hull and White usando el modelo MCMC, no podrá ser rechazado mediante los criterios de Kupiec y el Banco Internacional de Pagos.

### **4.5 Metodología del Trabajo**

Se va realizar el cálculo del VaR con diferentes metodologías (descritas en el apartado 4.5.2) a un portafolio con 510 rendimientos comprendidos entre el 3 de enero de 1995 y el 31 de diciembre de 1996; siendo la razón de escoger esta fecha la disponibilidad de los datos y la segunda y más importante probar la metodología en un periodo de crisis en México<sup>29</sup>. Dichos datos fueron obtenidos a partir de la base de datos de Economática omitiendo los fines de semana y días festivos.

---

<sup>29</sup> La crisis económica de México de 1994 fue la última y más reciente crisis del país de repercusiones mundiales. También conocida como el efecto tequila o el error de diciembre.

### 4.5.1 Elección de los Portafolios

El número de acciones en cada portafolio y la ponderación de cada uno de ellos se determinaron usando la metodología de Markowitz, eligiendo el portafolio que de acuerdo a la frontera eficiente ofreciera el menor riesgo. La ponderación de los activos que componen al portafolio de mínima varianza quedó de la siguiente manera:

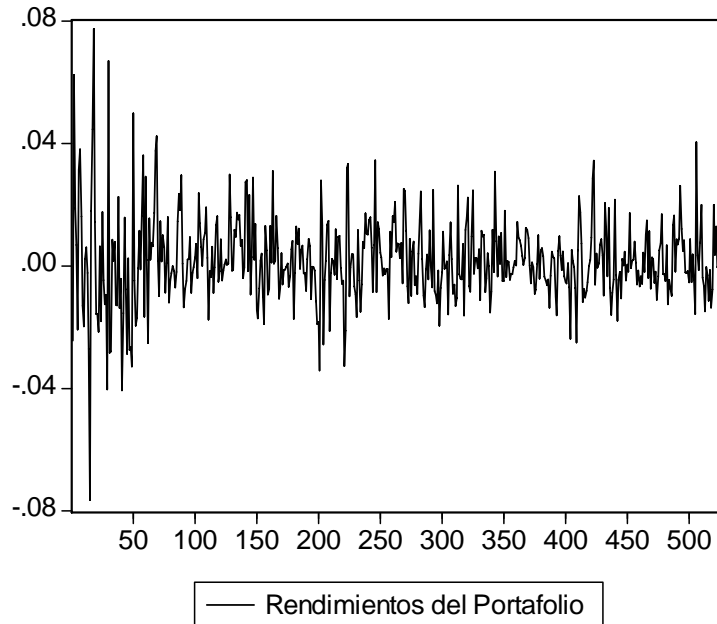
	<b>Pesos ponderados</b>
FEMSA	16.31%
ALFA	16.53%
BIMBO	23.11%
KIMBER	6.17%
PEÑOLES	5.39%
SAVIA	6.37%
SORIANA	4.81%
TELMEX	0.22%
GMEXIC	9.01%
GMODELO	7.33%
ELEKTRA	4.69%

Tabla 4.1 Composición accionaria del portafolio de mínima varianza.

Con una volatilidad dada por una desviación estándar de 1.418% y un rendimiento del 0.184% ( Anexo A, Gráfica A1 y Anexo B, Tabla B1 y B2)

Todas aquellas combinaciones de portafolios eficientes y que en conjunto conformar la frontera de portafolios eficientes se muestran en la gráfica en el Anexo A.

Como terminología de este trabajo, haremos referencia al término de “Portafolio” al formado por la combinación de acciones presentadas en la tabla 4.1, que fue calculado a través de la metodología de mínima varianza usando a Markowitz.



Gráfica 4.1. Rendimientos del Portafolio en el periodo de 1995-1996

En la gráfica 4.1 se muestran los 510 rendimientos del portafolio elegido y se puede notar que aunque los datos son estacionarios en el tiempo, es una serie heteroscedástica, es decir tiene periodos de baja volatilidad y periodos de muy alta volatilidad.

A partir de esta cartera y usando las diferentes metodologías econométricas y de simulación, se va a calcular el VaR mediante logaritmos programados en Mathematica version 5.2 y Matlab 7.3, elegidos debido a la facilidad de programación que proporcionan.

#### 4.5.2 Modelos Empleados

A fin de analizar las diferentes metodologías de Valor en Riesgo aplicadas a las acciones mexicanas, se utilizaron las siguientes: Método de Simulación Histórica, y los Métodos de Varianza-Covarianza basados en ponderaciones iguales para cada una de las observaciones pasadas, y en los métodos de varianza-covarianza con GARCH (1,1), M-GARCH, TARCH, EGARCH, PARCH y EWMA.

El parámetro que se utilizó para analizar el modelo de Varianza-Covarianza con EWMA, es el valor que recomienda RiskMetrics para rendimientos diarios de  $\lambda = 0.94$ .<sup>30</sup> Con respecto a los parámetros de los modelos econométricos, estos se obtuvieron mediante estimaciones de máxima verosimilitud en el paquete Econometric Views 5.0 aplicándolo a los datos del IPC para los periodos históricos mencionados.

Como modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo se usará el modelo de Hull y White, debido a que es uno de los modelos más sencillos de volatilidad estocástica continuos en el tiempo, en donde el rendimiento del portafolio es conducido por un movimiento geométrico Browniano, y la volatilidad al cuadrado o varianza,  $\sigma_{y_t}^2 = v_t$ , es conducida por otro movimiento geométrico Browniano, es decir:

$$\begin{aligned} dy_t &= \mu_y dt + \sqrt{v_t} dw_t^y \\ dv_t &= v_t \mu_v dt + v_t \sigma_v dw_t^v \end{aligned} \quad (53)$$

Donde:

$\mu_{y,v} \in \mathcal{R}$ ,  $\sigma_v > 0$ ,  $\{W_t^y\}_{t \geq 0}$  y  $\{W_t^v\}_{t \geq 0}$  Son movimientos Brownianos independientes.

De acuerdo a la metodología de los modelos MCMC, se va a hacer uso de la estadística bayesiana, en donde los parámetros estarán dados por:

$$\theta = \{\mu_y, \mu_v, \sigma_v^2, \rho\} \quad (57)$$

---

<sup>30</sup> Morgan J. P., (1996).

Donde:

$$p(y_i | \theta, v_i) = p(Y_i | \mu_y, \mu_v, \sigma_v^2, \rho, v_i) \quad (58)$$

Las distribuciones a priori se distribuyen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mu_y &\sim N(m, \tau) \\ \mu_v &\sim N(l, \zeta) \\ \sigma_v^2 &\sim GI(\alpha, \beta) \\ \rho &= 1 \end{aligned}$$

En donde para el parámetro  $\mu_y$  se obtiene a partir de:

$$\tau_i = \sqrt{\frac{\tau_{i-1}^2 v_{i-1}}{n\tau_{i-1}^2 + v_{i-1}}} \quad m_i = \frac{\tau_{i-1}^2 \bar{y} + m_{i-1} \left( \frac{v_{i-1}}{n} \right)}{\tau_{i-1}^2 + \frac{v_{i-1}}{n}}$$

El parámetro  $\mu_v$  se obtiene a partir de:

$$\zeta_i = \sqrt{\frac{\zeta_{i-1}^2 \sigma_{v_{i-1}}^2}{n\zeta_{i-1}^2 + \sigma_{v_{i-1}}^2}} \quad l_i = \frac{\zeta_{i-1}^2 \bar{y}^2 + l_{i-1} \left( \frac{\sigma_{v_{i-1}}^2}{n} \right)}{\zeta_{i-1}^2 + \frac{\sigma_{v_{i-1}}^2}{n}}$$

El parámetro  $\sigma_v^2$  se obtiene a partir de:

$$\alpha_i = \frac{n}{2} + \alpha_{i-1} \quad \beta_i = \beta_{i-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (y_j - \mu_i)^2$$

Serán usadas las ecuaciones para obtener  $m, l, \tau, \zeta, \alpha$  y  $\beta$ .

Las distribuciones a posteriori estarán representadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 p\left(\mu_y \mid \mu_v, \sigma_v^2, \rho, v_t, y_t\right) &\propto p\left(y_t \mid \theta, v_t\right) p\left(\mu_s\right) \sim N \\
 p\left(\mu_v \mid \mu_y, \sigma_v^2, \rho, v_t, y_t\right) &\propto p\left(y_t \mid \theta, v_t\right) p\left(\mu_v\right) \sim N \\
 p\left(\sigma_v^2 \mid \mu_y, \mu_v, \rho, v_t, y_t\right) &\propto p\left(y_t \mid \theta, v_t\right) p\left(\sigma_v^2\right) \sim GI \\
 p\left(v_t \mid \mu_y, \mu_v, \sigma_v^2, \rho, y_t\right) &\propto p\left(y_t \mid \theta, v_t\right) p\left(v_t\right): GIBBS
 \end{aligned}$$

Las distribuciones posteriores quedan de la siguiente forma:

$$p\left(\mu_y \mid \mu_v, \sigma_v^2, \rho, v_t, y_t\right) \sim N\left(\frac{\tau_{i-1}^2 \bar{y} + m\left(\frac{v}{n}\right)}{\tau^2 + \frac{v}{n}}, \sqrt{\frac{\tau^2 v}{n\tau^2 + v}}\right)$$

$$p\left(\mu_v \mid \mu_y, \sigma_v^2, \rho, v_t, y_t\right) \sim N\left(\frac{\zeta^2 \bar{y}^2 + l\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}{\zeta^2 + \frac{\sigma^2}{n}}, \sqrt{\frac{\zeta^2 \sigma^2}{n\zeta^2 + \sigma^2}}\right)$$

$$p\left(\sigma_v^2 \mid \mu_y, \mu_v, \rho, v_t, y_t\right) \sim GI\left(\frac{n}{2} + \alpha, \beta_i = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2\right)$$



Como valores iniciales para cada uno de los parámetros se tomarán:

$$\alpha^0 = 2.5$$

$$\beta^0 = \frac{1}{25}$$

$$v^0 = \sigma_p$$

$$\sigma_v^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(y_i^2 - \bar{y}^2)^2}{n-1}}$$

$$\mu_y^0 = \text{normrnd}(m, \tau)$$

$$\mu_v^0 = \text{normrnd}(l, \varsigma)$$

$$m^0 = \bar{y}$$

$$l^0 = \bar{y}^2$$

$$\tau^0 = \sigma_p$$

$$\varsigma^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(y_i^2 - \bar{y}^2)^2}{n-1}}$$

Que fueron los que bajo las observaciones gráficas, tenían las mejores convergencias.<sup>31</sup>

Para que la cadena olvide su estado inicial, solo se van a tomar los últimos 800 datos generados, usando como burn-in un valor de 200 y se realizaron 1000 simulaciones.

Además de correr una cadena suficientemente larga, se buscara que la diferencia entre las simulaciones de los parámetros sea menor a  $1 \times 10^{-6}$ , para de esta forma asegurar que cada parámetro haya convergido.

---

<sup>31</sup> Hang C., Wong H., (2006)

El Valor en Riesgo se va a obtener a partir del cuantil al 99% de los rendimientos del portafolio a un día, generados mediante las simulaciones, sobre un valor de portafolio de 1,000,000 de pesos.

Además se realizará el Backtesting<sup>32</sup> contando el número de excepciones sobre los resultados de Valor en Riesgo obtenidos de cada paso comparados contra los cambios reales en el valor del portafolio seleccionado.<sup>33</sup>

La ventaja de utilizar el número de excepciones en el backtesting es su simplicidad y sencillez de uso, y dado que la comprobación se hace cada día (excepción/ no excepción) los resultados son independientes de un día a otro.<sup>34</sup>

---

<sup>32</sup> En el *Backtesting* se realiza una comparación entre los resultados reales y la predicción del VaR, en un horizonte de tiempo. En las formas más simples se calcula el porcentaje de veces que se observan resultados que exceden el estimado del VaR y se compara ese número con los estándares del Banco Internacional de Pagos y de Kupiec. El *backtesting* es crítico y necesario para lograr calibrar los modelos.

<sup>33</sup> Lopez, José, (1998)

<sup>34</sup> International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards (2006)

## CAPÍTULO 5 RESULTADOS

La media y la varianza, de los 510 datos de rendimientos históricos para el portafolio se aproximaron mediante diferentes modelos econométricos en tiempo discreto, usando el programa computacional de EViews versión 5.

La media del portafolio se aproximó de acuerdo al modelo AR (Modelo Autorregresivo), el modelo MA (Modelo de promedios móviles), o el modelo ARMA (Modelo Autorregresivo de promedios móviles) que mejor se ajuste a los rendimientos de los portafolios; la volatilidad será estimada mediante los modelos GARCH (1,1), M-GARCH, TARCH, EGARCH y PARCH.

En la tabla 5.1, se muestran los parámetros para la media y varianza de los modelos econométricos para el periodo de análisis, el modelo que mejor ajusta a la media de los rendimientos del portafolio es un MA(1) y todas las constantes para la estimación de la media van a tener significancia estadística al 99.5 %. El modelo M-GARCH a diferencia de los modelos GARCH va a incorporar un parámetro de sensibilidad en la estimación de los rendimientos que está dado por la constante  $\alpha_5$ , la cual no tuvo significancia estadística a un 95%.

De acuerdo a las series de rendimientos, el modelo que mejor aproxima con respecto al criterio de Schwarz es el modelo TARCH teniendo un valor de -5.923054 y con respecto al criterio de Akaike y de Máxima Verosimilitud es el PARCH con -5.971922 y 1589.557 respectivamente.

	<b>GARCH (1,1)</b>	<b>M-GARCH</b>	<b>TARCH</b>	<b>EGARCH</b>	<b>PARCH</b>
<b>Parámetros de la media</b>					
Constante : $\alpha_0$	0.002087 (3.3293)*	0.001554 (1.7428)**	0.001803 (2.8606)*	0.001847 (2.9610)*	0.001846 (2.9510)*
Parámetro: $\alpha_1$	0.208978 (4.0782)*	0.196595 (3.8009)*	0.199832 (4.8810)*	0.203194 (4.7985)*	0.197154 (4.8840)*
Sensibilidad: $\alpha_5$		3.985487 (0.7625)			
<b>Parámetros de la Varianza</b>					
Constante: $\beta_0$	5.31xE(-5) (5.5244)*	5.87xE(-5) (5.7207)*	4.52xE(-6) (3.2594)*	-0.341063 (-4.3120)*	3.86xE(-8) (0.1776)
Parámetro: $\beta_1$	0.406902 (6.4717)*	0.465926 (6.8175)*	0.009649 (0.6707)		-0.523391 (1.0405)
Parámetro: $\beta_2$	0.325463 (4.3132)*	0.261292 (3.4921)*	0.915670 (47.940)*		0.909385 (32.953)*
Parámetro: $\beta_3$				-0.063811 (-3.3816)*	
Parámetro: $\beta_4$				-0.142035 (4.2257)*	
Parámetro: $\beta_5$				0.974305 (122.7408)*	
Parámetro: $\beta_6$					0.019024 (0.6981)
Parámetro: $\beta_7$			0.087085 (3.0210)*		
Exponente: $\delta$					3.085906 (2.3855)**
Criterio de Schwarz	-5.8833	-5.8643	-5.9230	-5.9120	-5.9154
Criterio de Akaike	-5.9236	-5.9127	-5.9714	-5.9603	-5.9719
Log likelihood	1574.773	1572.874	1588.428	1585.501	1589.557
*Significancia estadística a un 99.5%					
**Significancia estadística a un 95%					
Estadístico t está entre paréntesis.					
Tabla 5.1. Parámetros de los modelos econométricos discretos en el tiempo.					

A partir de la estimación de la media y la varianza de cada uno de los modelos econométricos discretos en tiempo, se encontró el VaR de un día a un 99% de confianza, estos resultados se muestran en la tabla 5.2, en donde todos los VaR estimados se encuentran en un rango que va de \$23,747.90 para la estimación del VaR con GARCH, hasta \$32,035.6 para la estimación del VaR con EWMA, para un portafolio de \$1,000,000.

	<b>Periodo 1995-1996</b>
	VaR (pesos)
<b>VaR con GARCH</b>	23,747.90
<b>VaR con MGARCH</b>	23,838.68
<b>VaR con TARCH</b>	24,410.72
<b>VaR con EGARCH</b>	29,522.60
<b>VaR con PARCH</b>	24,759.86
<b>VaR con EWMA</b>	32,035.60
Tabla 5.2.- Resultados del Valor en Riesgo para los modelos econométricos discretos de un portafolio de \$1000,000 a un día a un 99% de confianza.	

Posteriormente se calculó el VaR por las metodologías tradicionales usadas en Finanzas, en donde se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 5.3.

	<b>Periodo 1995-1996</b>
	VaR (pesos)
<b>VaR con Simulación histórica</b>	39,468.67
<b>VaR con Simulación Monte Carlo</b>	36,804.30
<b>VaR con Varianza Covarianza pesos iguales</b>	33,024.50
Tabla 5.3.- Resultados del Valor en Riesgo para los modelos clásicos en finanzas de un portafolio de \$1000,000 a un día a un 99% de confianza.	

De acuerdo a la tabla 5.3, el valor más bajo de VaR se obtiene a partir de la metodología de Varianza Covarianza con pesos iguales con \$33,044.050 y el valor más alto se da a partir de la Simulación Histórica con \$39,468.67

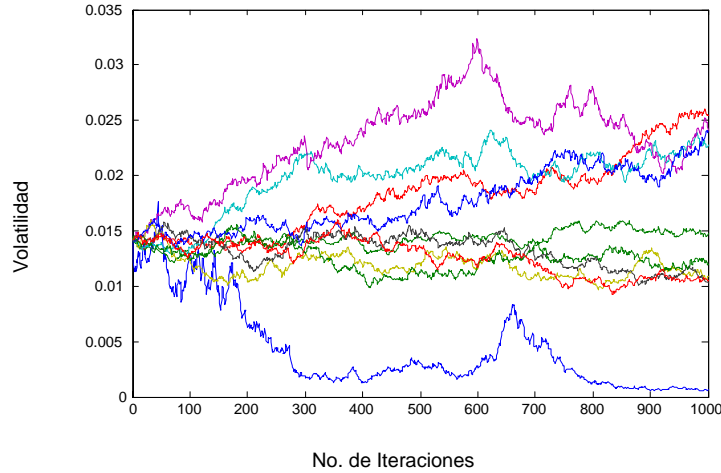
Los parámetros  $\theta = \{\mu_y, \mu_v, \sigma_v^2\}$ , del modelo Hull y White dado por:

$$dy_t = \mu_y dt + \sqrt{v_t} dw_t^y$$
$$dv_t = v_t \mu_v dt + v_t \sigma_v dw_t^v$$

fueron estimados a partir de un programa diseñado en Matlab, usando el método de Cadenas de Markov con Simulación Monte Carlo y el algoritmo de Gibbs.

Se realizaron 1000 simulaciones y solamente se utilizaron los 800 últimos resultados (burn-in de 200), esto se determinó después de graficar la convergencia de los parámetros de los parámetros en donde a partir de la simulación 200 se observa que empiezan a converger (Gráfica C1, C2, C3 del Anexo C.), Uno de los criterios establecidos para identificar si los parámetros han convergido a su valor real es que las diferencias entre los resultados de las simulaciones sean cada vez más pequeñas y llegaran a ser menor a  $1 \times 10^{-6}$ , luego de realizar 1000 simulaciones, el parámetro  $\mu_y$  tiene una diferencia de  $4.378 \times 10^{-7}$ , el parámetro  $\mu_v$  tiene una diferencia de  $2.6370 \times 10^{-8}$  y el parámetro  $\sigma_v$  tiene una diferencia de  $-1.5417 \times 10^{-7}$ , por lo cual se puede decir que los parámetros convergieron a un valor cercano al real.

En la gráfica 5.1 se muestran las primeras 10 simulaciones de la volatilidad del modelo MCMC a partir de los cuales se estimaran los parámetros del modelo de volatilidad estocástica.



Gráfica 5.1 Simulaciones del modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo mediante MCMC.

Los valores de la media y la desviación estándar de cada parámetro del Hull y White, calculadas a partir del modelo de Cadenas de Markov con Simulación Monte Carlo, pueden encontrarse en la tabla 5.4.

Parámetro	Media del Parámetro	Desviación estándar
$\mu_y$	0.001842	0.00277%
$\mu_v$	0.000204	0.004288%.
$\sigma_v$	0.021963	0.011787%

Tabla 5.4. Media y Desviación estándar de los parámetros del modelo de Hull y White, a partir del modelo MCMC

En la tabla 5.5 muestra la media y la volatilidad de los rendimientos encontradas en la últimas 800 simulaciones y los valores reales del portafolio, a partir del modelo MCMC se obtuvo una media de los rendimientos de 0.185014% con una desviación estándar de 1.757962%, ésta media se aproxima bastante a la media de los rendimientos reales del portafolio que era del 0.184%; la media de las volatilidades (desviaciones estándar) de los rendimientos del portafolio estimada mediante las simulaciones es de 1.5360566% con una desviación estándar de 0.269611%, la volatilidad real del rendimiento del portafolio es de 1.418%.

	<b>SIMULACIONES</b>	<b>DATOS REALES</b>
Media de los Rendimientos del portafolio.	0.185014%	0.184%.
Media de las volatilidades de los rendimientos del portafolio.	1.5360566%	1.418%

Tabla 5.5. Media de los Rendimientos y Volatilidad de los rendimientos del portafolio, simulados por MCMC y reales.

A partir de los parámetros obtenidos para el modelo Hull and White mediante MCMC, se calculó la máxima pérdida esperada a un día, a un 99% de confianza, los resultados del VaR se muestran en la tabla 5.6.

	<b>Periodo 1995-1996</b>
	<b>VaR (Pesos)</b>
<b>VaR con Hull and White y MCMC</b>	35,734.02

Tabla 5.6.- Resultados del Valor en Riesgo para el modelo MCMC de un portafolio de \$1,000,000 a un día a un 99% de confianza.

Para poder decidir sobre la aceptación o rechazo de algún modelo, se realiza el conteo del número de excesos de las pérdidas reales sobre el valor de cada uno de los Valores en Riesgo estimados. Éste conteo se encuentra en la tabla 5.7.

El 1996 el mayor número de excesos se da para la estimación del VaR con GARCH (1,1) con 17 excesos que al compararlo con la tabla de Kupiec (Ver anexo D, tabla D1) se encuentra por encima del valor crítico por lo que este método de cálculo del VaR se rechazaría al nivel de confianza del 99%, sin embargo sería aceptado a un nivel de confianza del 97.5%. Los excesos de las metodologías con MGARCH, TARCH y con PARCH también se encuentran por encima del valor crítico de Kupiec para un 99% de confianza y son aceptados a un nivel del 97.5%. Los excesos de la Simulación Histórica, Simulación Monte Carlo, Varianza-Covarianza con pesos iguales y estimación del VaR con EWMA y con EGARCH no exceden el valor crítico de Kupiec por lo que no se pueden rechazar a un 99%.



Al comparar los excesos con la clasificación del Banco Internacional de Pagos (Ver anexo D, tabla D2) los métodos de Simulación Histórica, Simulación Monte Carlo, Varianza-Covarianza con pesos iguales y estimación del VaR con EWMA y con EGARCH se encuentran en la “zona Verde” de la clasificación por lo cual no tendrían problemas de calidad y no requieren alguna modificación. Las estimaciones del VaR con GARCH(1,1), M-GARCH, TARCH y PARCH se encuentran en la “zona Roja” lo que indica casi con toda certeza que los modelos tienen problemas y su aplicación se sujetaría a la discrecionalidad del supervisor.

El modelo Hull and White usando Cadenas de Markov con Simulación Monte Carlo no sería rechazada de acuerdo a la metodología de Kupiec para este periodo a un nivel de significancia del 99% y se encontraría en la zona verde en la clasificación del BIS.

	<b>Excesos del VaR</b>
<b>VaR con Simulación histórica</b>	1
<b>VaR con Simulación Monte Carlo</b>	3
<b>VaR con Varianza Covarianza pesos iguales</b>	4
<b>VaR con GARCH (1,1)</b>	17
<b>VaR con MGARCH</b>	16
<b>VaR con TARCH</b>	16
<b>VaR con EGARCH</b>	6
<b>VaR con PARCH</b>	15
<b>VaR con EWMA</b>	6
<b>VaR con Hull and White y MCMC</b>	1
Tabla 5.7.- Conteo de las pérdidas que exceden cada uno de los Valores en Riesgo.	

## **CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES**

Se calculó el Valor en Riesgo para un portafolio formado por 11 acciones entre el 3 de enero de 1995 y el 31 de diciembre de 1996, el número de acciones se estableció a partir de los conceptos de frontera eficiente de Markowitz, en donde se eligió el portafolio de mínima varianza.

El cálculo del VaR fue realizado mediante diferentes metodologías por un lado se utilizaron las metodologías tradicionales como la simulación Monte Carlo y simulación histórica y por otro lado se usaron metodologías econométricas discretas y continuas en el tiempo que incorporaran el comportamiento de la volatilidad.

Los parámetros de cada modelo econométrico en tiempo discreto fueron aproximados a partir de los datos históricos y a través de estimadores de máxima verosimilitud. El modelo que mejor aproxima a los rendimientos históricos de acuerdo al criterio de Schwarz es el modelo TARCh y con respecto al criterio de Akaike y de Máxima Verosimilitud es el PARCh.

Mediante la metodología de MCMC se aproximaron los parámetros del modelo Hull y White, realizándose 1000 simulaciones y usando un burn-in de 200 para que la cadena olvide su estado inicial. La media de los rendimientos y de la volatilidad estimadas a partir del modelo de volatilidad estocástica continuo en el tiempo a través de dicha metodología se aproximan bastante a los valores reales, la diferencia entre la media de los rendimientos estimada y la real es de 0.5511% y la diferencia entre la volatilidad estimada y la volatilidad real es de 8.3256%.

Los modelos clásicos usados en la estimación del VaR, no fueron rechazados en el periodo de tiempo estudiado con respecto a Kupiec al 99% de confianza y se encontraron dentro de la “zona verde” de la clasificación del Banco Internacional de Pagos.

Únicamente los modelos EGARCH y EWMA no fueron rechazados en el periodo de tiempo estudiado con respecto a Kupiec al 99% de confianza y de acuerdo al criterio de Basilea se clasificaron en la “zona verde”, posiblemente porque éste primer modelo incorpora asimetría en la volatilidad en condiciones a la baja o a la alza en los mercados y el segundo modelo le da una mayor ponderación a las observaciones recientes que a las pasadas.

Los resultados que arrojan el número de excesos sobre cada una de las estimaciones del VaR, indican que el modelo Hull y White usando Cadenas de Markov con Simulación Monte Carlo no va a ser rechazado en el periodo de tiempo estudiado a un nivel de confianza del 99% y se va a encontrar en la “zona verde” de acuerdo a la clasificación del Banco Internacional de Pagos, lo que significaría que según el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, es un modelo preciso.

La estimación del VaR a partir del modelo Hull y White usando MCMC es similar a los calculados a partir de las metodologías tradicionales usadas en las finanzas, por lo cual en este periodo podrían utilizarse de forma indistinta. Una ventaja de los modelos de volatilidad estocástica continuos en el tiempo, es que incorporan un comportamiento en la volatilidad, que dependiendo del modelo que se esté utilizando, éste puede llegar a ser más preciso.

La idea de esta tesis es contribuir en la aplicación del modelo MCMC para simular un modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo y a partir de él, darle una aplicación como es la estimación del VaR; entre las posibles investigaciones futuras para este trabajo, están el cálculo del VaR usando diferentes modelos de volatilidad estocástica en tiempo continuo como pueden ser el modelo de Heston y el modelo de volatilidad de doble salto de Duffie, Pan y Singleton; y comparar la metodología de MCMC con la metodología de diferencias finitas para la simulación de los modelos de volatilidad. Dado lo satisfactorio de los resultados obtenidos, a

la versatilidad del modelo y al poco desarrollo en la materia, se puede concluir que existe una extensa línea de investigación en donde puede ser aplicado y así continuar con la búsqueda de metodologías para la modelación de las variables que se observan día a día en los mercados financieros.

## **BIBLIOGRAFÍA**

1. **Alonso C., Arcos A. (2005)**, "4 Hechos Estilizados de las series de rendimientos: Una ilustración para Colombia." Mimeo.
2. **Bams D., Lehnert T., Wolff C., (2005)**, "An evaluation framework for alternative VaR-models", *Journal of International Money and Finance*, No 24, 944-958
3. **Basel Committee on Banking Supervision (2003)**, "The New Basel Capital Accord", Bank For International Settlements.
4. **Basel Committee on Banking Supervision (2006)**, "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards", Bank For International Settlements.
5. **Bollerslev, T. (1986)**, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31 , 307-327.
6. **Boyle, P.P. (1977)**, "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, 323-338.
7. **Brooks, SP. and Gelman, A. (1997)**, "General methods for monitoring convergence of iterative simulations.", *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7, 434-455.
8. **Brown R (1828)**, "On particles contained in the Pollen of plants; and on 'the general existence of active molecules in Organic and Inorganic bodies", *Philosophical Magazine*, 4, 161-173
9. **Copeland T., Weston J., Shastri K., (2005)**, "Financial Theory and Corporate Policy". ED. Addison Wesley, 4a edición, E.U.A.
10. **Crouhy M, Galai D., Mark R. (2001)**, *Risk Management* , First Edition, Mc Graw Hill, New York.
11. **De Lara, A. (2001)**, *Medición y Control de Riesgos Financieros*, Limusa, México.

12. **Ding Z., Granger W., Engle R., (1993)**, "A long memory property of stock market returns and a new model". *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106.
13. **Elton E., Gruber M., (1977)**, "Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution", *The Journal of Business*, 50, 4, 415.
14. **Engle, R., (2001)**, "GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", *Journal of Economic Perspectives*, 15, 4, Fall, 157-168.
15. **Engle, R.F. (1982)**, "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*. 50: 987-1008.
16. **Engle R. F., Lilien D.M., Robins R.P., (1987)**, "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model," *Econometrica*, 55, 391-407.
17. **Gelman, A and Rubin, DB (1992)** "Inference from iterative simulation using multiple sequences", *Statistical Science*, 7, 457-511
18. **Gelman and D.B. Rubin. (1996)**, "Markov chain Monte Carlo methods in biostatistics". *Statistical Methods in Medical Research*, 5:339—355.
19. **Geman, S., and Geman, D. (1984)**, "Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images". In *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721-741.
20. **Gilks W., Richardson S., Spiegelhalter D. (1996)**, "Markov Chain Monte Carlo In Practice". Chapman and Hall, Great Britain.
21. **Glosten L., Jagannathan R., Runkle D. (1993)**, "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks". *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
22. **Hang N., Wong H., (2006)**, "**Simulation Techniques in Financial risk Management**", **Wiley Interscience**.
23. **Hastings W. K., (1970)**, "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications", *Biometrika*, 57,97-109.
24. **Hull, J.C. & White, A. (1987)**, "The pricing of options and on assets with stochastic volatilities", *Journal of finance*, 42, 281-300
25. **Jorion, P. (1997)**, *Valor en Riesgo*, Ed. Limusa, México.

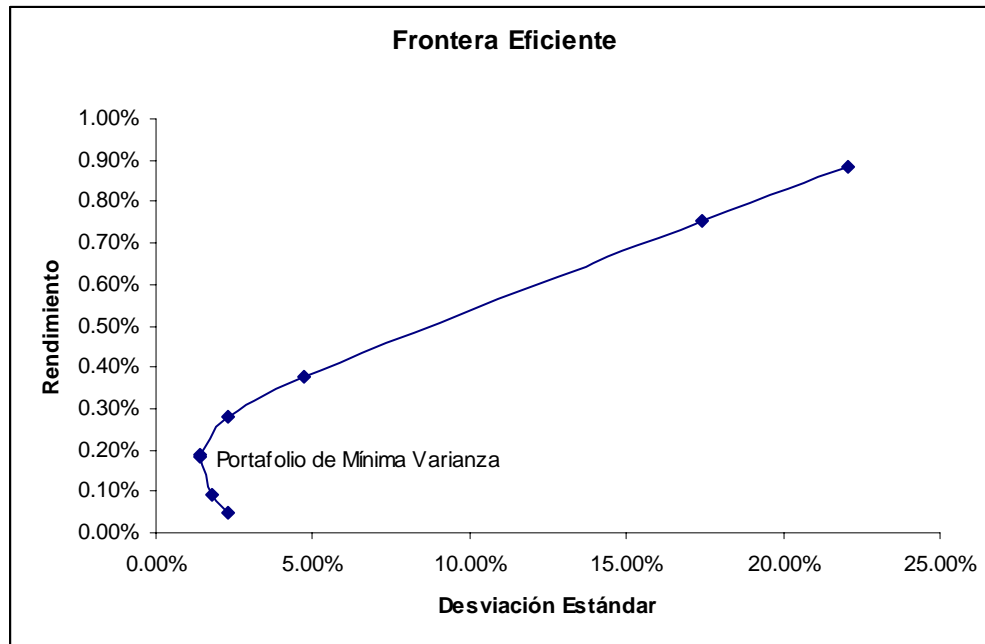
26. **Kupiek, P. (1995)**, "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *Journal of Derivatives*, 2, 73-84.
27. **Longerstaey, J, Spencer M. (1996)**, "Riskmetrics - Technical Document", 4th edition, December, JP Morgan/ Reuters, New York.
28. **Lopez J. (1998)**, "Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates", FRBNY.
29. **Markowitz, Harry M. (1952)**, "Portfolio Selection". *Journal of Finance*, 7, 1, 77-91.
30. **Martel E. M., Vázquez P. F.**, "Descripción del uso de WinBugs en los métodos bayesianos, una aplicación en auditoría". *Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión*, Universidad de las Palmas de Gran Canaria.
31. **Mina, J., Xiao J (2001)**, "Return to Riskmetrics: The Evolution of a Standard", *Riskmetrics*", 2001.
32. **Morgan J. P, (1996)**, "RiskMetrics-Technical document". New York. 4a edición.
33. **Nelson D. B., (1991)**, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59, 347-370.
34. **Périsse M. C., Pepe M. L.**, "Una Aplicación del Método de Monte Carlo en el Análisis de Riesgo de Proyectos: su automatización a través de una planilla de cálculo".
35. **Ramírez E. (2004)**, "Valor en Riesgo con aproximaciones Cuadráticas", *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Volumen 3, Número 3, Septiembre 2004.
36. **Ramírez, Ramírez (2007)**, "Valor en Riesgo, Modelos econométricos contra Modelos tradicionales", *Análisis Económico*, 51, XII, 179-198.
37. **Roberts S. W., (1959)**, "Control chart tests based on geometric moving average", *Technometric*, 1, 239-250.
38. **Ross S., Westerfield R., Jaffe J., Jordan B., (2008)**, "Modern Financial Management". ED. Mc Graw Hill, 8a edición, E.U.
39. **Thierry A., (2005)**, "Do Power GARCH Models Really Improve Value-At-Risk Forecasts?", *Journal of Economics and Finance*, Vol. 29, No. 3

40. **Venegas, F., (2006)**, “Riesgos Financieros y Económicos”. ED. Thomson, México D.F.



## ANEXOS

### ANEXO A. Portafolio Óptimo



Gráfica A1. Frontera eficiente para el periodo 1995-1996.

El cual tiene una desviación estándar de 1.418% y un rendimiento del 0.184%

## ANEXO B. Gráficas del IPC en los periodos de estudio

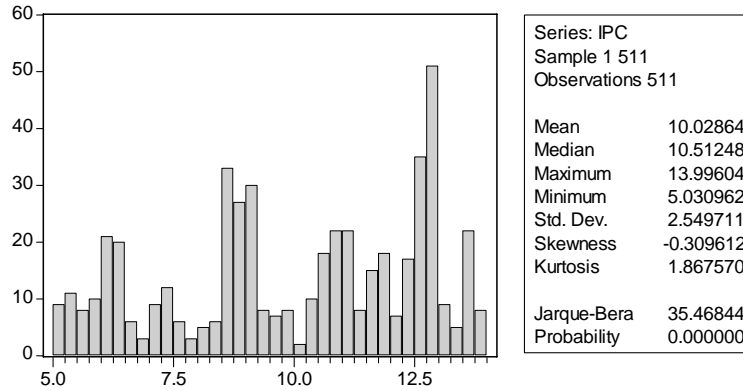


Tabla B1. Histograma y estadísticos del IPC para 511 datos del periodo del 3 de enero de 1995 al 31 de diciembre de 1996.

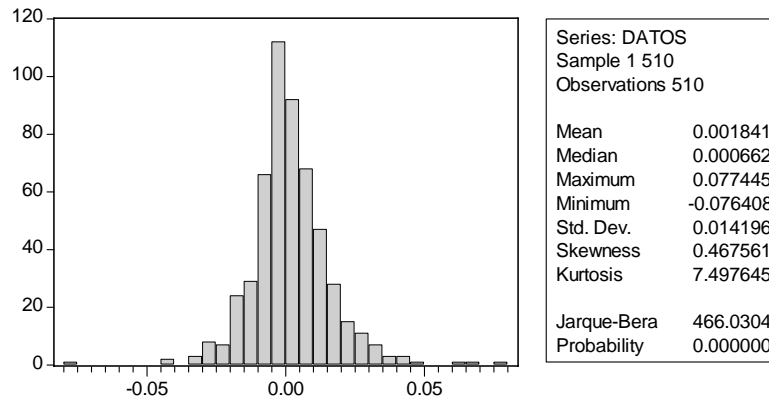
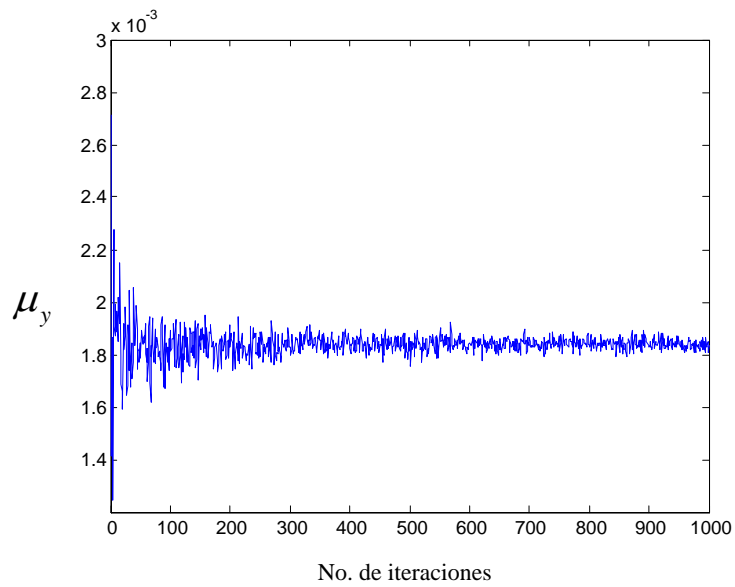
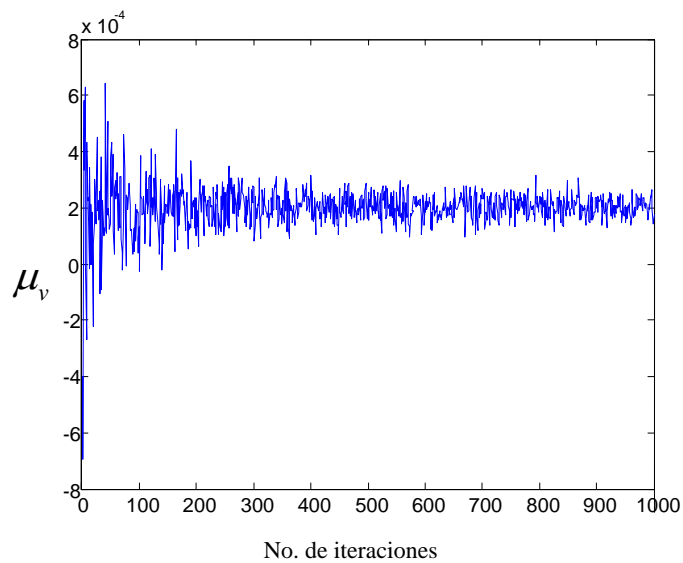


Tabla B2. Histograma y estadísticos de los rendimientos del IPC para 510 datos del periodo del 3 de enero de 1995 al 31 de diciembre de 1996.

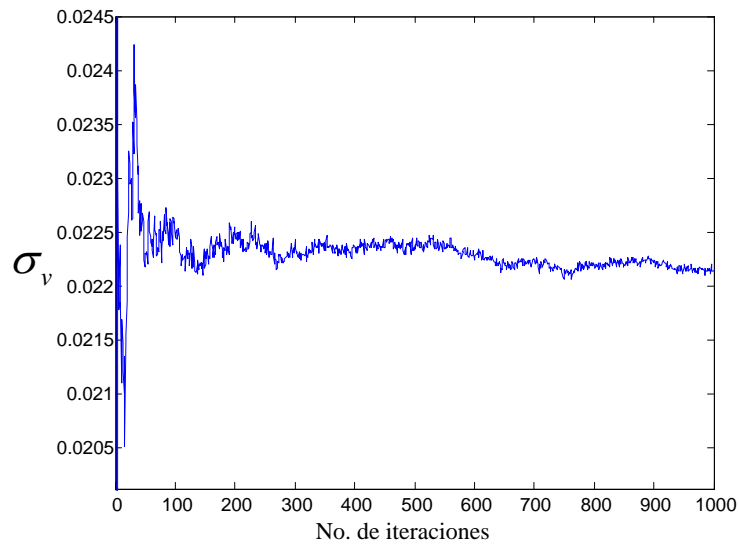
## ANEXO C. Histogramas de Resultados



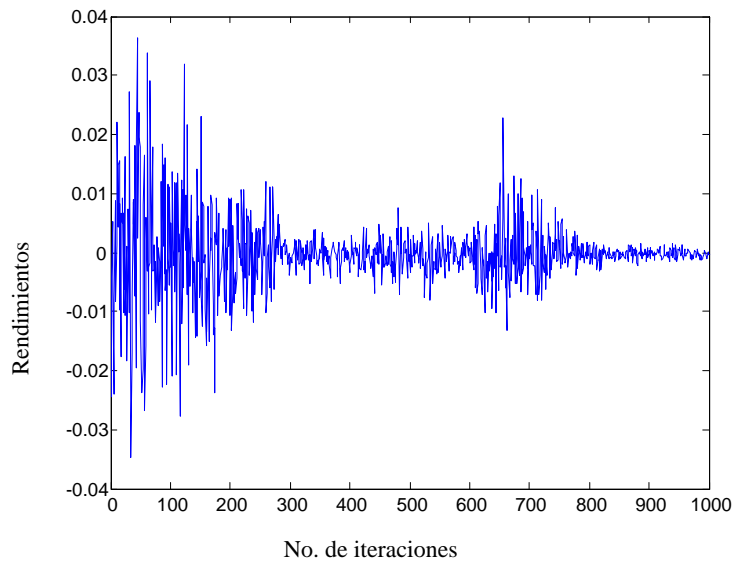
Gráfica C1. Convergencia del parámetro  $\mu_y$ , de la ecuación  $dy = \mu_y dt + \sqrt{v} dw_t^y$ .



Gráfica C2. Convergencia del parámetro  $\mu_v$ , de la ecuación  $dv = v\mu_v dt + v\sigma_v dw_t^v$ .



Gráfica C3. Convergencia del parámetro  $\sigma_v$  de la ecuación  $dv = v\mu_v dt + v\sigma_v dw_t^v$ .



Gráfica C4. Rendimientos obtenidos en la iteración 510, para el modelo de volatilidad estocástica en tiempo continuo con MCMC

## ANEXO D. Tablas para Backtesting

Lo fundamental en cualquier prueba de backtesting es comparar los resultados del modelo de valuación con los resultados reales con una serie de datos históricos, si ambos resultados se asemejan lo suficiente, esta comprobación no revelará deficiencias de calidad en los modelos. Por el contrario, si esta comparación revela suficientes diferencias, es casi seguro que existen problemas bien en el modelo o bien en los supuestos utilizados en el backtesting.<sup>35</sup>

### D1. Criterio de Kupiec

Uno de los métodos más utilizados para verificar si el modelo es adecuado o no, es el de Kupiec (1995), que consiste en contar el número de veces en que las pérdidas exceden el VaR durante un periodo. Se asume que  $N$  es el número de observaciones que exceden las pérdidas y para un nivel de confianza dado  $(1-p)$  se prueba si  $N$  es estadísticamente diferente de la probabilidad de error  $p$  que se considera para el cálculo del VaR.

La probabilidad de observar  $N$  excesos durante un periodo de  $T$  observaciones en total se explica con una distribución binomial dada por:

$$(1-p)^{T-N} p^N$$

La decisión que se necesita tomar consiste en determinar si la relación de excesos de pérdidas contra las observaciones totales, es estadísticamente diferente a la probabilidad que se utiliza para el cálculo del VaR.

---

<sup>35</sup> Basel Committee on Banking Supervision (2003 y 2006)

Kupiec desarrolló unas regiones de confianza con base en una distribución chi cuadrada con un grado de libertad, considerando la hipótesis nula de que  $p$  es estadísticamente igual a la probabilidad utilizada para el VaR contra la hipótesis de que  $p$  sea diferente a dicha probabilidad.

$(1-c)$	<b>T=255</b>	<b>T=510</b>	<b>T=1000</b>
0.010	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
0.025	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
0.050	$6 < N < 21$	$16 < N < 21$	$37 < N < 65$
0.075	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
0.100	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Tabla D1. Regiones de no rechazo de Kupiec

## D2. Criterio del Banco Internacional de Pagos

Teniendo en cuenta las limitaciones de las pruebas de backtesting, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea presenta el siguiente marco para que los supervisores interpreten los resultados de estas comprobaciones a través de una serie de posibles respuestas, según la gravedad de los síntomas detectados. Estas respuestas se clasifican en tres zonas, verde, amarilla y roja, cada una de un color según su importancia. La zona verde corresponde a resultados del backtesting que no muestran problema alguno con la calidad o precisión del modelo del banco. A la zona amarilla pertenecen los resultados que no plantean cuestiones en este sentido, pero que no conducen tampoco a una conclusión definitiva. La zona roja corresponde a resultados que casi con toda certeza indican problemas con el modelo de riesgo del banco.

El comité reporta la clasificación basándose en una muestra de 250 observaciones independientes; cuando se trate de muestras mayores, la zona amarilla comenzará en el punto donde la probabilidad acumulada sea igual o superior a 95% y la zona roja donde equivalga o supere el 99.99% usando probabilidades binomiales.

<b>ZONA</b>	<b>NÚMERO DE EXCEPCIONES</b>
<b>Verde</b>	0
	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
<b>Amarilla</b>	10
	11
	12
	13
	14
<b>Roja</b>	15 ó más

Tabla D2. Clasificación del modelo de acuerdo al número de excepciones para 510 Observaciones, del Banco Internacional de Pagos.